Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 06.11.2017, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Skalar- und Kreuzprodukte (3+3+4 Punkte)

Betrachten Sie die x-abhängigen Vektoren

$$\mathbf{a}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) die Ableitungen

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}] \qquad \frac{d}{dx}[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$$

(b) die Spatprodukte

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \qquad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

(c) die Integrale

$$\int_0^1 dx\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \qquad \int_0^1 dx\, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \qquad \int_0^1 dx\, \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

Aufgabe 2: Produktregel (10 Punkte)

(a) Beweisen Sie die Produktregel der Differentiation

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

wobei $f(x)$ und $g(x)$ zwei ausreichend gutmütige Funktionen sind.

(b) Beweisen Sie nun auch die Produktregel

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{a}(x) \times \mathbf{b}(x)] = \frac{d\mathbf{a}(x)}{dx} \times \mathbf{b}(x) + \mathbf{a}(x) \times \frac{d\mathbf{b}(x)}{dx},$$

wobei $\mathbf{a}(x)$ und $\mathbf{b}(x)$ zwei (ebenso gutmütige) vektorwertige Funktionen sind.

Aufgabe 3: Bahnkurven (5+5 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Bahnkurven und berechnen Sie sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung.

(a)

$$\mathbf{r}(t) = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie separate Skizzen an für die Fälle $\gamma > 0$ und $\gamma < 0$ sowie $|\gamma| \ll \omega$ und $|\gamma| \gg \omega$.

(b)

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \rho \sin \omega t \\ \rho \cos \omega t \\ \beta \omega t / 2\pi \end{pmatrix}$$

Geben Sie die anschauliche Bedeutung von ρ, β und ω an.

Aufgabe 4: Kreisbewegung (5+5 Punkte)

Betrachten Sie eine Kreisbewegung mit Radius R und Winkel $\varphi(t)$ zwischen x-Achse und Ortsvektor. Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung als Funktion der Zeit explizit für

(a) $\varphi(t) = \omega t$

(b) $\varphi(t) = \frac{1}{2} a t^2$.