Übungen zur Theoretischen Physik I   WS 2017/2018   Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 13.11.2017, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (3+3+4 Punkte)

Vereinfachen Sie

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}} \;; \qquad \frac{1}{\cosh x - \sinh x} \;; \qquad \frac{x^3+4x^2-9x-20}{x+5}$$

(Das Ergebnis soll keine Brüche mehr enthalten. Relevante Stichworte sind binomische Formeln, Hyperbelfunktionen und Polynomdivision.)

Aufgabe 2: Zylinderkoordinaten (4+3+3 Punkte)

(a) Definieren Sie Zylinderkoordinaten (Skizze) und geben sie diese für die folgenden Raumpunkte (gegeben in kartesischen Koordinaten) an:

$$(0,1,0) \quad (\sqrt{2},\sqrt{2},4) \quad (1,-1,1) \tag{1}$$

Zeigen Sie allgemein, wie die kartesischen Koordinaten als Funktion der Zylinderkoordinaten ausgedrückt werden können.

(b) Allgemeine Bewegungen im Raum können nun in Zylinderkoordinaten beschrieben werden. Geben Sie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ in Zylinderkoordinaten an. Definieren Sie hierzu geeignete Einheitsvektoren.

(c) Leiten Sie schließlich einen Ausdruck für die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten ab.

Aufgabe 3: Kugelkoordinaten (2+2+2+1+2+2 Punkte)

(a) Definieren Sie Kugelkoordinaten (Skizze) und geben sie diese für die folgenden Raumpunkte (gegeben in kartesischen Koordinaten) an:

$$(0,1,0) \quad (\sqrt{2},0,\sqrt{2}) \quad (1,-1,1)$$

Zeigen Sie, dass die kartesischen Koordinaten folgendermaßen durch Kugelkoordinaten r,θ,φ ausgedrückt werden können:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(b) Allgemeine Bewegungen im Raum können nun in Kugelkoordinaten beschrieben werden. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten die Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

annimmt, wobei wir die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert haben.

(c) Zeigen Sie, dass die so definierten Vektoren tatsächlich Einheitsvektoren sind und senkrecht aufeinander stehen.

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

(e) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= \dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi - \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

(f) Leiten Sie einen Ausdruck für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten ab.

Aufgabe 4: Ellipsen (7+3 Punkte)

In der Vorlesung werden wir aus den Newtonschen Gesetzen die Planetenbahnen ableiten, die nach den bekannten Keplerschen Gesetzen Ellipsen beschreiben. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei Brennpunkten (im Abstand $2e$ entlang der x-Achse) konstant ist, $r_1 + r_2 = 2a$.

(a) Zeigen Sie, dass Ellipsen in kartesischen Koordinaten (mit dem Koordinatenursprung in der *Mitte* der Ellipse) die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Drücken Sie b durch a und e aus.

(b) Zeigen Sie, dass Ellipsen in Polarkoordinaten (mit dem Koordinatenursprung jetzt im rechten Brennpunkt!) die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \epsilon\cos\varphi)$$

erfüllen, wobei $p = a(1-\epsilon^2)$ (a ist die grosse Halbachse; ϵ die Exzentrizität).

Hinweis: Wenn wir die kartesischen Achsen des Koordinatensystems mit Ursprung im rechten Brennpunkt mit x', y' bezeichen (so dass $x' = x - e$ und $y' = y$), dann sind die Polarkoordinaten definiert durch $x' = r\cos\varphi$ und $y' = r\sin\varphi$.