Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 27.11.2017, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen: Hyperbelfunktionen (3+5+3+3+3+3 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen einige elementare Eigenschaften der Hyperbelfunktionen $\sinh x$ (Sinus Hyperbolicus), $\cosh x$ (Cosinus Hyperbolicus), $\tanh x$ (Tangens Hyperbolicus) und $\coth x$ (Cotangens Hyperbolicus) diskutiert werden. Diese sind definiert als

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad ; \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ; \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(a) Berechnen Sie die Ableitungen dieser Funktionen.

(b) Beweisen Sie die Relationen

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 2\sinh x \cosh x \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ 1 &= \cosh^2 x - \sinh^2 x \end{aligned}$$

(c) Drücken Sie $\sinh(ix)$ und $\cosh(ix)$ durch $\sin x$ und $\cos x$ aus, um den Zusammenhang zwischen den Hyperbelfunktionen und den trigonometrischen Funktionen explizit herzustellen — daher rührt ein Teil des Namens für diese Funktionen.

(d) Skizzieren Sie die geometrische Figur, die durch die kartesischen Koordinaten

$$x = A\cosh\alpha \qquad y = A\sinh\alpha \tag{1}$$

gegeben ist, wobei A einen festen Wert annimmt und $\alpha \in \mathbf{R}$. Welche geometrische Bedeutung hat A? Zeigen Sie, dass x und y über $x^2 - y^2 = A^2$ zusammenhängen, d.h. die Figur ist eine *Hyperbel* — daher der andere Teil des Namens dieser Funktionen.

(e) Führen Sie neue Koordinaten über $X = x + y$ und $Y = x - y$ ein. (Geben Sie an, welche geometrische Bedeutung diese Transformation hat.) Wie lautet die Formel für die Hyperbel nun? Diese sollte Ihnen (auch) bekannt sein.

(f) Berechnen Sie die Taylorreihen bis zur sechsten Ordnung um den Punkt $x = 0$ für die Funktionen $\sinh x$, $\cosh x$ und $\tanh x$.

Aufgabe 2: Taylorreihen (4+4+3 Punkte)

(a) Geben Sie die Taylor-Reihe für $\sin x$ und $\cos x$ um den Punkt $x = 0$ an. Berechnen Sie die Ableitung von $\sin x$, indem Sie die Taylor-Reihe Term für Term ableiten. Zeigen Sie, dass Sie das erwartete Ergebnis finden.

(b) Geben Sie die Taylor-Reihe von $\ln(1 + x)$ um den Punkt $x = 0$ an. Wie sieht es mit der Taylorreihe von $\ln x$ um den Punkt $x = 0$ aus?

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int dx \, \frac{1}{1+x} \,,$$

indem Sie die Taylorreihe des Integranden (um $x = 0$) Term für Term integrieren. Vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis in Teil (b) und erklären Sie den Zusammenhang.

Aufgabe 3: Energie des gedämpften harmonischen Oszillators (10 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2$ des gedämpften harmonischen Oszillators als Funktion der Zeit. Sie dürfen annehmen, dass der Oszillator *sehr* schwach gedämpft ist, d.h. $\gamma \ll \omega$.

Aufgabe 4: Inhomogene, lineare Differentialgleichungen (5+5 Punkte)

Betrachten Sie inhomogene, lineare Differentialgleichungen, wie wir sie an einem Beispiel in der Vorlesung kennengelernt haben.

(a) Zeigen Sie zunächst, warum sich die allgemeine Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen zusammensetzt aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung sowie einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) + \gamma f(x) = 1$$

an.