Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 04.12.2017, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Reihen um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung an (d.h. inklusive des Terms $\sim (x - x_0)^4$):

$$(1-x^2)e^{-x^2} \quad ; \quad \ln(1+x^2) \quad ; \quad \frac{1}{1+\sin x} \quad ; \quad e^{-1/x^2} \quad ; \quad x \coth x$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ die folgenden Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Weitsprung (10 Punkte)

Ein punktförmiger und reibungsloser Weitspringer springt mit der Geschwindigkeit v_0 ab. Geben Sie den optimalen Absprungwinkel an, unter dem der Weitspringer die größte Weite springt. Berechnen Sie diese Weite mit der Absprunggeschwindigkeit 10m/s (nahe der Geschwindigkeit der besten 100m Sprinter) und vergleichen Sie mit dem Weitsprung-weltrekord.

Aufgabe 3: Geladenes Teilchen im Magnetfeld (5+5 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m unterliegt im Magnetfeld $\mathbf{B}$ der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

wobei $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Das homogene Magnetfeld soll in die $\hat{\mathbf{z}}$-Richtung zeigen, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.

(a) Geben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung an. Geben Sie explizit die x, y und z-Komponenten der Bewegungsgleichung an. Welche kartesischen Koordinaten des Teilchens werden durch die Bewegungsgleichungen miteinander gekoppelt?

(b) Lösen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung (allgemeine Lösung) und beschreiben Sie die resultierende Bewegung. (Hinweis: Versuchen Sie die Bewegungsgleichung auf die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators zurückzuführen.)

Aufgabe 4: Gekreuzte Felder (10 Punkte)

Erweitern Sie die Situation in Aufgabe 3 um ein homogenes elektrisches Feld in die x-Richtung, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$, so dass insgesamt eine Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ auf das Teilchen wirkt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese. In welche Richtung bewegt sich das Teilchen im Mittel, wenn die z-Komponente seiner Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet.

Bemerkung: Vielleicht haben Sie in der Schule etwas über den Hall-Effekt gelernt? Wenn ja, können Sie darüber nachdenken, wie Ihr Ergebnis mit diesem Effekt zusammenhängt. Wenn nicht, sollten Sie sich über den Effekt informieren und dann nachdenken. Seit Anfang der 80er Jahre ist die quantenmechanische Version dieses Problems (und seine Erweiterungen) im Zusammenhang mit dem Quanten-Hall-Effekt intensiv untersucht worden, für dessen verschiedene Inkarnationen 1985 und 1998 der Nobelpreis der Physik vergeben wurde. Das können Sie auch nachlesen oder sich von den Tutoren erzählen lassen.