Übungen zur Theoretischen Physik I WS 2017/2018 Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 11.12.2017, *Anfang* der Vorlesung (**d.h. spätestens 10:15**)

Aufgabe 1: Fingerübungen (5+5 Punkte)

(a) Geben Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen für $x \ll 1$ bis zur vierten Ordnung an:

$$f_1(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad ; \quad f_3(x) = (1+x)^{3/2}$$

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

der Funktionen $f(x,y) = y \sin xy$, $f(x,y) = (x+y)^2$ und $f(x,y) = e^{x+y^2}$.

Aufgabe 2: Freier Fall (3+7 Punkte)

Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den freien Fall mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes sowie Trennung der Variablen, d.h. mit dem in der Vorlesung besprochenen Verfahren.

(a) Die Schwerkraft zeige in Richtung der negativen z-Achse, $F = -mg$. Geben Sie die potentielle Energie $V(z)$ an. Wählen Sie $V(z=0) = 0$.

(b) Geben Sie nun (nach einiger Rechnung) die Lösung für die Anfangsbedingungen $z(t_0 = 0) = z_0$ sowie $\dot{z}(t_0 = 0) = v_0$ ($v_0 > 0$) an.

Aufgabe 3: Pendelperiode (4+6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Pendelperiode für den Fall berechnet, dass das Pendel Schwingungen und keine Rotationen ausführt. In dieser Aufgabe wollen wir den Fall von Rotationen betrachten.

(a) Geben Sie durch eine einfache Energiebetrachtung an, für welche Energien E des Pendels die Bewegung rotationsartig ist.

(b) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass aus der Energieerhaltung die Relation

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}[E - mg\ell(1-\cos\varphi)]}$$

folgt. Zeigen Sie zunächst, dass daher die Periode der Rotationen durch

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}[E - mg\ell(1-\cos\varphi)]}}$$

gegeben ist. Zeigen Sie nun, dass die Rotationsperiode für große Energien genähert werden kann durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{2E}}\left(1 + \frac{mg\ell}{2E} + \dots\right). \tag{1}$$

Aufgabe 4: Ellipsen (5+5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Fläche F einer Ellipse mit Halbachsen a und b gegeben ist durch

$$F = \pi ab.$$

(b) Betrachten Sie nun den Umfang der Ellipse. Dieser lässt sich im Gegensatz zur Fläche nicht elementar ausdrücken, sondern nur über ein sogenanntes *elliptisches* Integral. Eine Form der elliptischen Integrale ist uns bereits in der Vorlesung im Zusammenhang mit dem Pendel begegnet. Um den geometrischen Ursprung dieses Namens zu beleuchten, sollen Sie also zeigen, dass der Umfang einer Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist durch das vollständige elliptische Integral zweiter Art

$$U = 4a\int_0^{\pi/2} d\varphi\sqrt{1 - K^2\sin^2\varphi}$$

mit $K^2 = 1 - b^2/a^2$. Beachten Sie, dass nach dem Satz des Pythagoras das infinitesimale Bogenlängenelement ds gegeben ist durch $ds = [dx^2 + dy^2]^{1/2} = dx[1 + (dy/dx)^2]^{1/2}$, wobei $y = y(x)$ die Ellipse in kartesischen Koordinaten beschreibt. Schreiben Sie den Umfang der Ellipse $U = \oint ds$ als Integral über x (wobei Sie ausnutzen, dass der Ellipsenumfang aus vier gleichen Teilen besteht) und führen Sie eine geeignete Substitution durch.