Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 17.6.2018, 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Pendel mit horizontal oszillierendem Aufhängepunkt (10 P.)

Betrachten Sie ein Pendel der Länge ℓ, Masse m und Auslenkwinkel θ, dessen Aufhängepunkt sich horizontal wie $a\cos\Omega t$ bewegt. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in einer geeigneten verallgemeinerten Koordinate auf und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung die Form

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = \frac{a\Omega^2}{\ell}\cos\Omega t\cos\theta \tag{1}$$

annimmt.

Aufgabe 2: Schnell oszillierende Kräfte (10 P.)

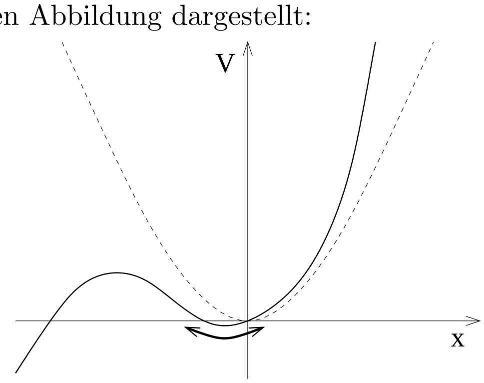
Untersuchen Sie die Bewegungsgleichung in Aufgabe 1 im Limes großer Frequenzen Ω. Geben Sie das effektive Potential an wie in der Vorlesung definiert und finden Sie dessen Gleichgewichtslagen. Bestimmen Sie weiterhin, für welche Frequenzen Ω die Gleichgewichtslagen stabil sind.

Aufgabe 3: Naive Störungstheorie für den anharmonischen Oszillator (4+4+2 P.)

Betrachten Sie einen eindimensionalen anharmonischen Oszillator mit der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \frac{1}{3}m\epsilon x^3,$$

wobei ϵ eine kleine Größe sei; die Anharmonizität ist also schwach. Das ungestörte und das gestörte Potential sind in der folgenden Abbildung dargestellt:



Für kleine ϵ und kleine Auslenkungen kann man die Dynamik mittels Störungstheorie berechnen. Dies bedeutet, dass wir die Lösung wie bei einer Taylor-Reihe nach Potenzen von ϵ entwickeln.

Zunächst betrachten wir eine „naive“ Störungstheorie, bei der wir nur die Auslenkung x in eine Taylor-Reihe in ϵ entwickeln:

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots$$

(a) Leiten Sie aus L die Lagrangesche Bewegungsgleichung her und setzen Sie die Entwicklung für x ein. Zeigen Sie so, dass die Bewegungsgleichung bis zur zweiten Ordnung in ϵ lautet

$$\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + \epsilon^2\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_0 + \epsilon\omega_0^2 x_1 + \epsilon^2\omega_0^2 x_2 = -\epsilon x_0^2 - 2\epsilon^2 x_0 x_1.$$

(b) Die Gleichung muss für Terme in nullter, erster und zweiter Ordnung in ϵ separat erfüllt sein. Zeigen Sie, dass die *algemeinen* Lösungen für x_0 und x_1 lauten

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0\cos\omega_0 t, \\ x_1 &= -\frac{a_0^2}{2\omega_0^2} + a_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) + \frac{a_0^2}{6\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t. \end{aligned}$$

Hier wurde der Nullpunkt der Zeit so verschoben, dass in x_0 keine zusätzliche Phase auftritt. Hinweis: Wie ergeben sich die allgemeinen Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen?

(c) Geben Sie die Gleichung für x_2 an, die sich aus der zweiten Ordnung in ϵ ergibt. Sie beschreibt eine erzwungene harmonische Schwingung, wobei die antreibende Kraft einen Term enthält, der genau mit der Eigenfrequenz ω_0 oszilliert (Resonanz). Begründen Sie, warum die Lösung für x_2 Oszillationen mit unbeschränkt wachsender Amplitude beschreibt. Was bedeutet dies für die Anwendbarkeit dieser Störungstheorie?

Aufgabe 4: Verbesserte Störungstheorie für den anharmonischen Oszillator (10 P.)

Betrachten Sie wieder das System aus Aufgabe 3. In einer verbesserten Störungstheorie entwickelt man auch die Schwingungsfrequenz nach kleinen ϵ:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \ldots, \\ \omega &= \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Dies ist deswegen naheliegend, weil die Schwingungsfrequenz eines anharmonischen Oszillators von der Amplitude der Schwingung abhängt.

Es erweist sich als nützlich, die Entwicklung der Frequenz umzuschreiben als

$$\omega_0 = \omega - \epsilon\omega_1 - \epsilon^2\omega_2 - \ldots$$

Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung bis zur zweiten Ordnung in ϵ nun lautet

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + \epsilon^2\ddot{x}_2 + \omega^2 x_0 + \epsilon\omega^2 x_1 + \epsilon^2\omega^2 x_2 \\ &\qquad = -\epsilon x_0^2 + 2\epsilon\omega\omega_1 x_0 - 2\epsilon^2 x_0 x_1 + 2\epsilon^2\omega\omega_1 x_1 - \epsilon^2\omega_1^2 x_0 + 2\epsilon^2\omega\omega_2 x_0. \end{aligned}$$

Die wesentliche Idee ist, dass man nun zusätzliche Parameter ω_1, ω_2, $\ldots$ zur Verfügung hat, die so gewählt werden, dass keine Resonanzen auftreten.

Schreiben Sie die Gleichungen für x_0, x_1 und x_2 auf und bestimmen Sie ω_1 und ω_2 so, dass in diesen Gleichungen keine Resonanzen auftreten. Dazu müssen Sie wieder die Gleichungen für x_0 und x_1 allgemein lösen, vgl. Aufgabe 3. Geben Sie das Ergebnis für x bis zur ersten Ordnung und für ω bis zur zweiten Ordnung in ϵ an.