Übungen zur Theoretischen Physik II   Sommer 2019, Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 24.6.2008, 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Selbstoszillationen 10 P.)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der Eigenfrequenz ω_0, dessen Auslenkung $x(t)$ mit einer kleinen Zeitverzögerung $\tau \ll 2\pi/\omega_0$ wieder als treibende Kraft rückgekoppelt wird. Wir nehmen an, dass diese zum Zeitpunkt t wirkende Kraft proportional zur Auslenkung zur Zeit $t-\tau$ ist,

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \alpha x(t-\tau). \tag{1}$$

Die Proportionalitätskonstante α kann ein beliebiges Vorzeichen haben.

Entwickeln Sie die Kraft in eine Taylor-Reihe bis zur linearen Ordnung in τ und geben Sie die allgemeine Lösung der resultierenden Bewegungsgleichung an. Wie unterscheidet sich die Lösung in Abhängigkeit vom Vorzeichen von α?

Aufgabe 2: Gekoppelte Federpendel (5+5 P.)

Betrachten Sie ein Federpendel, an dem noch ein weiteres identisches Federpendel hängt (Federkonstante k und Masse m).

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie hieraus die Bewegungsgleichungen ab.

(b) Berechnen Sie die Frequenzen der beiden Normalmoden.

Aufgabe 3: Lineare Kette (3+3+2+2 P.)

Betrachten Sie eine lineare Kette von N gekoppelten Federpendeln. Alle Massen m und Federkonstanten D seien identisch. Wir stellen uns vor, dass zwischen der ersten und der N-ten Masse auch eine Feder ist. Sie können sich das so vorstellen, dass die Massen und Federn im Kreis angeordnet sind. Mathematisch können Sie das so beschreiben, dass die lineare Kette periodische Randbedingungen erfüllt,

$$\eta_1(t) = \eta_{N+1}(t) \tag{2}$$

bzw.

$$\eta_N(t) = \eta_0(t), \tag{3}$$

wobei $\eta_j(t)$ die Auslenkung der j-ten Masse ist.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen die Form

$$\ddot{\eta}_j - \omega_0^2(\eta_{j+1} - 2\eta_j + \eta_{j-1}) = 0 \tag{4}$$

mit $\omega_0^2 = D/m$ und $j = 1, 2, \ldots, N$ annehmen.

(b) Machen Sie den ebenen-Wellen Ansatz

$$\eta_j(t) = A \exp[i(kx_j - \omega t)] \tag{5}$$

für die Normalmoden, wobei $x_j = ja$ die Gleichgewichtslage der j-ten Masse ist und k ein Wellenvektor. Leiten Sie den Zusammenhang von ω und k (Dispersionsrelation) her.

(c) Aufgrund der periodischen Randbedingungen sind nur diskrete k-Werte möglich. Zeigen Sie, dass

$$k = \frac{2\pi n}{Na} \tag{6}$$

mit einer natürlichen Zahl n.

(d) Zeigen Sie weiterhin, dass zwei k-Werte, die sich um (den reziproken Gittervektor)

$$K = \frac{2\pi}{a} \tag{7}$$

unterscheiden, zu identischen Auslenkungen führen. Zählen Sie ab, wie viele unabhängige Normalmoden Sie daher erhalten. Stellen Sie schließlich die Dispersionsrelation ω als Funktion von k für den Wellenvektorbereich $[-\pi/a, \pi/a]$ (Brillouin-Zone) graphisch dar.

Aufgabe 4: Molekülschwingungen (4+4+2 P.)

Eine wichtige Anwendung für kleine Schwingungen sind Molekülschwingungen. Zur Bestimmung dieser Schwingungen müssen zunächst die Translations- und Rotationsfreiheitsgrade eliminiert werden.

(a) Als Beispiel betrachten wir die Elimination der Translationsfreiheitsgrade. Die Orte der N Atome, aus denen ein Molekül besteht, seien $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i0} + \mathbf{u}_i$, wobei $\mathbf{r}_{i0}$ die Gleichgewichtslagen und $\mathbf{u}_i$ Auslenkungen sind. Die Massen der Atome seien m_i.

Zur Elimination der Translation fordern wir, dass der Schwerpunkt $\mathbf{R} = (\sum_i m_i \mathbf{r}_i)/(\sum_i m_i)$ des Moleküls am Ursprung in Ruhe ist. Zeigen Sie, dass daraus die Bedingung

$$\sum_i m_i \mathbf{u}_i = 0$$

für die Auslenkungen folgt. Wieviele Translationsfreiheitsgrade werden dadurch eliminiert?

(b) Betrachten Sie die Schwingungen eines dreiatomigen, gestreckten, symmetrischen Moleküls, z.B. CO_2. Die Masse von Sauerstoff sei m, die von Kohlenstoff M (d.h. $m_1 = m_3 = m$ und $m_2 = M$). Wir beschränken uns hier auf Schwingungen entlang der Molekülachse (*Streckschwingungen*). Die Molekülachse sei in x-Richtung orientiert. Es sei $\mathbf{u}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Wir nehmen an, dass die potentielle Energie von Streckungen und Stauchungen der Bindungen

$$V = \frac{k_1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k_1}{2}(x_3 - x_2)^2$$

beträgt. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} Q_a &= x_1 + x_3, \\ Q_s &= x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Normalkoordinaten sind, indem Sie die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in diesen Koordinaten ausdrücken. L sollte dann von der bekannten einfachen Form für Normalkoordinaten sein. Skizzieren Sie die Auslenkungen der Atome in diesen Normalmoden.

(c) Leiten Sie dann die Lagrange-Gleichungen für die Normalkoordinaten her. Diese sollten voneinander unabhängig sein. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der Normalmoden.