Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 12

Abgabetermin: Montag, 01.07.2019, 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Trägheitstensor (10 P.)

Berechnen Sie den Trägheitstensor in einem Koordinatensystem Ihrer Wahl für ein homogenes Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c.

Aufgabe 2: Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem (5+5 P.)

In der Vorlesung haben wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten Koordinatensystem mit Hilfe der Drehmatrizen berechnet. In dieser Aufgabe sollen Sie auf analogem Wege die Komponenten des Drehimpulses im raumfesten Koordinatensystem berechnen.

(a) Betrachten Sie wieder einen körperfesten Vektor

$$\mathbf{a} = a'_i \hat{\mathbf{x}}'_i \tag{1}$$

(Einsteinsche Summenkonvention). Berechnen Sie die Zeitableitung $\mathrm{d}\mathbf{a}/\mathrm{d}t$ dieses Vektors und bestimmen Sie die Komponenten des resultierenden Vektors im raumfesten Koordinatensystem. Drücken Sie weiter die Komponenten a'_i durch die Komponenten a_i im raumfesten Koordinatensystem aus. Zeigen Sie, dass dies auf

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}t} = a_i \left(R^T \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \right)_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \tag{2}$$

führt.

(b) Wie üblich können Sie nun den mit dem antisymmetrischen Tensor

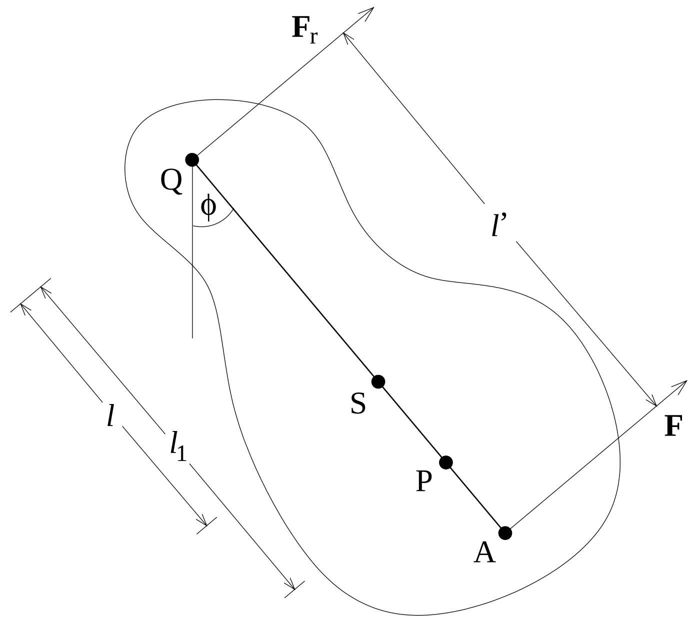
$$R^T \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

verknüpften Pseudovektor definieren. Dies ist offenbar die Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem. Berechnen Sie die Komponenten, indem Sie die Matrizenmultiplikationen explizit durchführen oder sie auf die Rechnungen im Skript zurückführen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 3: Physikalisches Pendel (5+5 P.)

Betrachten Sie einen beliebigen starren Körper im Schwerefeld, der in Q um die (horizontale) z-Achse frei drehbar aufgehängt ist. Das Trägheitsmoment für Drehungen um die z-Achse sei $I = I_{zz} + Ml^2$, wobei I_{zz} das entsprechende Trägheitsmoment für Drehungen um den Schwerpunkt S ist, M die Masse und $l = \overline{QS}$. Die übrigen Bezeichnungen ergeben sich aus der Skizze.

(a) Leiten Sie zunächst die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen des starren Körpers her. Bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz Ω_Q. Der Punkt P ist dadurch definiert, dass ein mathematisches Pendel der Länge $l_1 = \overline{QP}$ mit derselben Frequenz schwingt. Bestimmen Sie l_1.



(b) An einem beliebigen Punkt A des Körpers greife eine Kraft $\mathbf{F}$ an. Da wir den Angriffspunkt entlang der Kraftrichtung verschieben können, ohne dass sich Kraft oder Drehmoment ändern, können wir o.B.d.A. annehmen, dass A auf der Geraden durch den Drehpunkt Q und den Schwerpunkt S liegt. $\mathbf{F}$ stehe senkrecht auf dieser Geraden und auf der Rotationsachse. Aufgrund von $\mathbf{F}$ wirkt eine zusätzliche Reaktionskraft $\mathbf{F}_r$, die im Aufhängepunkt Q angreift und ebenfalls senkrecht auf der Geraden durch Q und S steht. (Dies ist die zusätzliche Zwangskraft, die notwendig ist, um bei Anwendung der Kraft $\mathbf{F}$ den Drehpunkt festzuhalten.)

Berechnen Sie F_r/F, wobei F und F_r die Kräfte in den in der Skizze gezeigten Richtungen sind. Dabei kann die Schwerkraft vernachlässigt werden. Drücken Sie das Ergebnis durch $l' = \overline{QA}$ und l_1 aus. In welchem Fall verschwindet F_r? Dies ist der „sweet spot" eines Tennisschlägers: Trifft der Ball hier auf, so ergibt sich keine Reaktionskraft auf das Handgelenk.

Hinweis: Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für die Translation des Schwerpunkts in Richtung von $\mathbf{F}$ und für die Rotation um die z-Achse auf. Eliminieren Sie die generalisieren Koordinaten aus den beiden Gleichungen mit Hilfe der Zwangsbedingung (fester Drehpunkt).

Aufgabe 4: Wie Reibung Billardkugeln beschleunigt (5+5 P.)

(a) Betrachten Sie eine homogene Billardkugel der Masse m und des Radius a, die zur Zeit $t = 0$ einen Kraftstoß erhalte. Der Kraftstoß soll genau zentral und horizontal erfolgen und den Impuls mv_0 auf die Kugel übertragen. Die Kugel wird zunächst auf der Unterlage gleiten, ohne zu rotieren. Die Reibung sorgt jedoch dafür, dass der Berührungspunkt gegenüber dem Schwerpunkt abgebremst wird, so dass die Kugel zu rollen beginnt. Ab einer bestimmten Zeit t_1 rollt die Kugel schließlich ohne zu gleiten. Bestimmen Sie diese Zeit t_1.

Anleitung: Bei Gleitreibung ist der Betrag der Reibungskraft $\mathbf{F}_r$ gegeben durch das Produkt aus Gleitreibungskoeffizient μ und Normalkraft (d.h. Schwerkraft bei einer horizotalen Unterlage). Sie ist entgegen der Bewegungsrichtung gerichtet. Erfolgt die Bewegung in x-Richtung gilt also

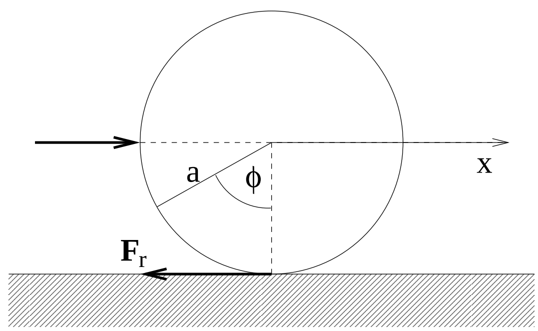
$$\mathbf{F}_r = -\mu m g \, \mathbf{e}_x.$$

Beachten Sie, dass die Reibungskraft betragsmäßig nicht von der Geschwindigkeit abhängt. Sie ist also konstant und von Null verschieden, solange der Berührungspunkt gleitet. Die Reibungskraft greift am Berührungspunkt an. Für $t > 0$ ist sie die einzige relevante Kraft.

Die Translation des Schwerpunkts werde durch die Koordinate x beschrieben und die Rotation durch den Winkel ϕ. Zur Zeit $t = 0$ können wir $x(0) = 0$ und $\phi(0) = 0$ annehmen. Weiter ist $\dot{x}(0) = v_0$ und $\dot{\phi}(0) = 0$, da der Stoß zentral erfolgt. Nutzen Sie aus, dass $m\ddot{x}$ gleich der angreifenden

Kraft und $I\ddot{\phi}$ gleich dem angreifenden Drehmoment ist. Sie erhalten zwei Bewegungsgleichungen für x bzw. ϕ. Lösen Sie diese für $\dot{x}$ und $\dot{\phi}$.

Die Bedingung für Rollen ohne Gleiten ist $\dot{x} = a\dot{\phi}$. t_1 ist der Zeitpunkt, zu dem diese Bedingung erstmals erfüllt ist. Skizzieren Sie $\dot{x}(t)$ und $a\dot{\phi}(t)$ für Zeiten $t < t_1$ und $t \geq t_1$.



(b) Betrachten Sie nun den allgemeineren Fall, dass der Kraftstoß horizontal aber *nicht zentral* erfolgt, sondern in einer Höhe h oberhalb der Geraden durch den Schwerpunkt. Wieder werde der Impuls mv_0 übertragen. Durch den nicht zentralen Stoß erhält die Kugel nun aber auch einen Drehimpuls $I\omega_0 = hmv_0$, woraus sich die Anfangsbedingung für $\dot{\phi}$ ergibt: $\dot{\phi}(0) = \omega_0 = hmv_0/I$.

Diskutieren Sie die Bewegung der Kugel für die Fälle $h < 2a/5$, $h = 2a/5$ (was ist an diesem Wert besonders?) und $h > 2a/5$.