

Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 13

Abgabetermin: Mittwoch, 10.07.2019, 10:15 in der Vorlesung

Dieses Übungsblatt gibt Ihnen die Möglichkeit, interessante Physik kennenzulernen und gibt Ihnen außerdem Zusatzpunkte. Sie müssen für die aktive Teilnahme 50% von 12 Übungsblättern erreichen. In diesem Sinne ist dies ein Bonus-Blatt.

Aufgabe 1: Hamilton-Funktion (10 P.)

Berechnen Sie die zu

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\phi(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

gehörige Hamilton-Funktion, ausgedrückt durch Koordinaten und verallgemeinerte Impulse (und ohne die Geschwindigkeiten). Ist der kanonische Impuls in diesem Fall gleich dem gewöhnlichen (kinetischen) Impuls?

Diese Hamilton-Funktion beschreibt ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld und der entsprechende Hamilton-Operator spielt in der Quantenmechanik eine ganz wichtige Rolle.

Aufgabe 2: Guiding Center Koordinaten (4+3+3 P.)

Betrachten Sie die Hamilton-Funktion aus Aufgabe 1 für Elektronen (mit Ladung $q = -e$), die sich in der xy -Ebene bewegen und einem homogenen Magnetfeld in z -Richtung unterliegen. Wir können also $\phi = 0$ und

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

schreiben. (Dieses Vektorpotential bezeichnet man auch als symmetrische Eichung.)

(a) Zeigen Sie zunächst mithilfe von Poisson-Klammern, dass die beiden Komponenten des kinetischen Impulses

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + e\mathbf{A} \quad (3)$$

bis auf Vorfaktoren kanonisch konjugierte Variablen sind. Wie müssen Sie die Komponenten des Impulses skalieren, damit sie kanonische Variablen im strengen Sinne werden?

(b) Schreiben Sie die Hamilton-Funktion in diesen neuen kanonischen Variablen. Erhalten Sie die Zyklotron-Frequenz $\omega_c = eB/m$, mit der das geladene Teilchen die Kreisbahnen durchläuft, indem sie die Hamilton-Funktion mit der bekannten Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (4)$$

eines harmonischen Oszillators vergleichen.

(c) Um einen kompletten Satz von kanonischen Variablen zu erhalten, brauchen wir zwei weitere Variable. Führen Sie hierzu die *guiding center* Koordinaten

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{eB}\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\pi} \quad (5)$$

ein. Zeigen Sie, dass \mathbf{R} physikalisch den Mittelpunkt der Kreisbahn beschreibt. Zeigen Sie dann, dass \mathbf{R}_x und \mathbf{R}_y bis auf Vorfaktoren kanonisch konjugiert sind und dass diese Variablen unabhängig von $\boldsymbol{\pi}$ sind. Berechnen Sie hierzu wieder geeignete Poisson-Klammern.

Aufgabe 3: Bewegung in einem starken Magnetfeld

(3+4+3 P.)

Betrachten Sie weiterhin das Problem aus Aufgabe 2, nun aber mit einem zusätzlichen Potential $V(\mathbf{r}) = e\phi(\mathbf{r})$. Das Potential variiere als Funktion des Orts auf einer charakteristischen Skala ξ .

(a) Drücken Sie die Hamilton-Funktion durch die in Aufgabe 2) neu eingeführten kanonischen Variablen aus. Begründen Sie, warum Sie im Limes großer Magnetfelder das Potential

$$V(\mathbf{r}) \simeq V(\mathbf{R}) \quad (6)$$

nähern können. Unter welcher Bedingung ist diese Näherung angemessen?

(b) Geben Sie in dieser Näherung die Bewegungsgleichungen an. Zeigen Sie, dass die Dynamik der kinetischen Impulse von der Dynamik der *guiding centers* komplett abkoppelt und beide auf ganz unterschiedlichen Zeitskalen ablaufen, indem Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen (u.U. unter Ausnutzen von Poisson-Klammern) aufstellen. Sie sollten für die *guiding centers* finden, dass sie der Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathbf{R}} = -\frac{1}{eB} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\mathbf{R}} V(\mathbf{R}) \quad (7)$$

gehörchen.

(c) Erklären Sie, warum sich demnach die *guiding centers* entlang der Äquipotentiallinien von $V(\mathbf{R})$ bewegen. Betrachten Sie das Potential

$$V(\mathbf{R}) = V_0[\cos(2\pi x/\xi) + \cos(2\pi y/\xi)]. \quad (8)$$

Wie bewegen sich die *guiding centers* um die Maxima des Potentials, wie um die Minima? Was passiert dazwischen? Denken Sie darüber nach, inwiefern Ihre Ergebnisse speziell für dieses Potential sind und inwiefern allgemein.

Diese Überlegungen spielen eine wichtige Rolle in der Theorie des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts. Für die Entdeckung des Effekts hat Klaus von Klitzing den Physik-Nobelpreis im Jahr 1985 erhalten.

Aufgabe 4: Wirkungsvariable als adiabatische Invariante

(4+4+2 P.)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator, dessen Eigenfrequenz ω sich als Funktion der Zeit adiabatisch ändert. Diess bedeutet, dass die Rate der Änderung klein gegenüber ω ist. Zur Veranschaulichung können Sie an ein mathematisches Pendel denken, das kleine Schwingungen ausführt und dessen Faden langsam verkürzt wird. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega^2(\epsilon t) x = 0,$$

wobei ϵ eine kleine Größe ist, $\epsilon \ll \omega$. Insbesondere gilt dann

$$\dot{\omega} = \epsilon \omega'(\epsilon t). \quad (9)$$

In dieser Aufgabe sollen Sie durch explizite Lösung der Bewegungsgleichung für $\epsilon \ll \omega$ zeigen, dass die Wirkungsvariable

$$J = \oint dx p$$

eine *adiabatische Invariante* ist, d.h. dass sie in dieser Näherung zeitlich konstant ist. Hier ist $p = m\dot{x}$ der zu x kanonisch konjugierte Impuls.

(a) Führen Sie zunächst die neue (dimensionslose) Variable $\tau = \epsilon t$ ein. Wir schreiben Ableitungen nach τ als $x' = dx/d\tau = \dot{x}/\epsilon$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung in eine Differentialgleichung für $x(\tau)$ um. Machen Sie dann den Ansatz

$$x(\tau) = A \exp\left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^\tau d\tau' y(\tau')\right)$$

mit einer Konstante A . (Für konstantes y erhält man einfach den üblichen Exponentialansatz für den harmonischen Oszillator mit konstanter Eigenfrequenz.) Zeigen Sie, dass $y(\tau)$ die Differentialgleichung

$$\epsilon y' + y^2 + \omega^2(\tau) = 0.$$

erfüllt.

(b) Entwickeln Sie

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \epsilon y_1(\tau) + \dots$$

nach Potenzen von ϵ und setzen sie dies in die Differentialgleichung für y ein. Bestimmen Sie die Gleichungen für y_0 und y_1 , indem sie die Koeffizienten verschiedener Ordnungen in ϵ separat betrachten. Lösen Sie schließlich die Gleichungen für y_0 und y_1 . Beachten Sie dabei, dass ω natürlich von der Zeit abhängt. Zeigen Sie, dass dies zu dieser Ordnung auf

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{\omega(\epsilon t)}} e^{\pm i \int_0^t dt' \omega(\epsilon t')}$$

führt.

(c) Die reelle, physikalische Lösung läßt sich dann offenbar schreiben als

$$x = \frac{B}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\int_0^t dt' \omega(\epsilon t') + \phi_0\right).$$

Berechnen Sie damit schließlich die Wirkungsvariable

$$J = \oint dx p = \int_0^T dt \dot{x} p.$$

Zeigen Sie, dass Ihr Resultat nicht von der Zeit abhängt und J damit eine adiabatische Invariante ist. Es mag hilfreich sein, in der Zeitintegration zu der neuen Integrationsvariable

$$\phi(t) = \int_0^t dt' \omega(\epsilon t') \tag{10}$$

mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(T) = 2\pi$ überzugehen.

Diese Methode entspricht formal der WKB-Näherung für Systeme der Quantenmechanik, die nahe am klassischen Limes sind, in dem $\hbar \rightarrow 0$. Die eindimensionale Schrödingergleichung ist von der Form $-(\hbar^2/2m)\psi'' + [V(x) - E]\psi = 0$. Der klassische Limes ist dann angemessen, wenn die Variation von $V(x) - E$ als Funktion von x langsam verglichen mit der deBroglie-Wellenlänge der Teilchen ist. Dies entspricht der langsamen zeitlichen Änderung von ω in unserem Problem. Alternativ können Sie sehen, dass die Grenzfälle $\hbar \rightarrow 0$ und $\epsilon \rightarrow 0$ mathematisch völlig analog sind. In der Quantenmechanik sind allerdings auch Probleme wichtig, in denen ω^2 in gewissen Raumbereichen negativ ist. Dann hat man es mit dem Tunneleffekt zu tun und die WKB-Methode gibt eine gute Näherung dafür, wie wahrscheinlich dieser Prozess ist.