Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 2

Abgabetermin wg. Ostermontag: vor Beginn der Vorlesung am Mittwoch, den 24.4.2019; Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Montagstutoriums können an einem Tutorium ihrer Wahl am Dienstag teilnehmen.

Aufgabe 1: Trennung der Variablen (5+5 P.)

Geben Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a) $\frac{dn}{dt} = n^2$ mit der Anfangsbedingung $n(0) = 1$.

(b) $\frac{dn}{dt} = \frac{n^3}{t}$ mit der Anfangsbedingung $n(1) = 1$.

Aufgabe 2: Lagrange-Funktionen und Lagrange-Gleichungen I ($4 \times 2,5$ P.)

Stellen Sie für die folgenden Systeme die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf. (Geben Sie explizit an, welche Koordinaten Sie verwenden!) Leiten Sie die zugehörigen Lagrange-Gleichungen ab:

(a) Harmonischer Oszillator.

(b) Bewegung eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne. (Sie dürfen annehmen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt und dass die Sonne in Ruhe bleibt.)

(c) Freier Fall eines Körpers im homogenen Schwerefeld der Erde.

(d) Bewegung eines Teilchens im homogenen Schwerefeld der Erde, die auf eine parabolische Fläche $z(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ eingeschränkt ist. (Die Erdoberfläche liegt in der xy-Ebene.)

Aufgabe 3: Lagrange-Funktionen und Lagrange-Gleichungen II (5+5 P.)

Die Lagrange-Gleichungen gelten auch dann, wenn die Zwangsbedingungen zeitabhängig sind. Ein entsprechendes Beispiel soll in dieser Aufgabe untersucht werden: Betrachten Sie einen kreisförmigen Draht (Radius R), auf dem reibungsfrei eine Perle der Masse m gleitet. Der Kreis rotiere im Schwerefeld der Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse durch den Kreismittelpunkt. Der Winkel ϕ messe den Winkel zwischen Drehachse und dem Radiusvektor der Perle vom Kreismittelpunkt, wobei $\phi = 0$ dem niedrigsten Punkt des Kreises entspreche.

(a) Die kartesischen Koordinaten der Perle sind demnach durch

$$x(t) = R \sin\phi \cos(\omega t) \quad y(t) = R \sin\phi \sin(\omega t) \quad z(t) = R - R\cos\phi \tag{1}$$

gegeben. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ und $\dot{z}(t)$ sowie die kinetische Energie T der Perle. (Beachten Sie, dass der Winkel $\phi = \phi(t)$ auch eine Funktion der Zeit ist.) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion $L = T - V$ die Form

$$L = \frac{1}{2} m(R^2\dot{\phi}^2 + \omega^2 R^2 \sin^2\phi) - mg(R - R\cos\phi) \tag{2}$$

annimmt

(b) Zeigen Sie, dass die Perle der Lagrange-Gleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R}\sin\phi = \omega^2 \sin\phi\cos\phi \tag{3}$$

gehorcht.

Aufgabe 4: Perle auf rotierender Drahtschleife (4+3+3 P.)

Hier soll die Bewegung der Perle aus der vorigen Aufgabe mit Hilfe der Bewegungsgleichung näher untersucht werden.

(a) Geben Sie die Gleichgewichtslösungen ϕ_0 an, d.h. die Winkel, an denen die Perle bewegungslos verharren kann. Zeigen Sie insbesondere, dass eine zusätzliche Gleichgewichtslage auftritt, sobald die Drahtschleife ausreichend schnell rotiert.

(b) Betrachten Sie kleine Auslenkungen $\delta\phi$ aus der Gleichgewichtslage, $\phi = \phi_0 + \delta\phi$. Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung für $\delta\phi$ ab, wobei Sie nur lineare Terme in $\delta\phi$ behalten.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichung für $\delta\phi$, welche der Gleichgewichtslösungen stabil bzw. instabil sind.