Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 4

Abgabetermin: **Montag, den 6.5.2019, spätestens 14:15 in Vorlesung**

Aufgabe 1: Klotz auf Keil (5+5 P.)

Ein würfelförmiger Klotz der Masse m bewege sich reibungsfrei auf einem Keil mit Neigungswinkel α. Der Keil mit Masse M kann sich wiederum reibungsfrei auf einer horizontalen Oberfläche bewegen.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion und die zugehörige Bewegungsgleichung in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung an.

Aufgabe 2: Schiefe Ebene (10 P.)

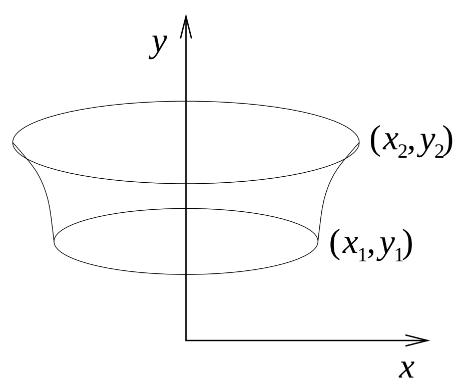
Lösen Sie die Bewegung eines Teilchens auf einer schiefen Ebene (Aufgabe 1(a), Blatt 3) mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Geben Sie die Zwangsbedingung, die Lagrange-Gleichungen sowie die auftretenden Zwangskräfte explizit an.

Aufgabe 3: Atwoodsche Fallmaschine (10 P.)

Lösen Sie die Bewegung der Atwoodschen Fallmaschine (Aufgabe 1(b), Blatt 3) mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Geben Sie die Zwangsbedingung, die Lagrange-Gleichungen sowie die auftretenden Zwangskräfte explizit an.

Aufgabe 4: Minimale Rotationsfläche (3+4+3 P.)

Als Beispiel für die Lösung eines Variationsproblems mittels der Euler-Gleichung betrachten wir minimale Rotationsflächen. Eine Rotationsfläche werde dadurch erzeugt, dass eine Kurve $y(x)$ mit den Endpunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) um die y-Achse rotiert.



Bestimmen Sie durch Aufstellen und Lösen der Euler-Lagrange Gleichung die Kurve $y(x)$, die die Rotationsfläche F minimiert.

Die Fläche eines infinitesimalen Streifens zwischen y und $y + dy$ ist $dF = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$, da dieser Streifen als Kegelstumpf betrachtet werden kann. Damit ist

$$dF = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

und die Gesamtfläche ist (ohne die „Deckel“)

$$F = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =: \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichung für f her.

(b) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichung, indem Sie sie zunächst in eine gewöhnliche Differentialgleichung *erster Ordnung* für $y(x)$ überführen und diese anschließend mittels Trennung der Variablen lösen.

(c) Geben Sie die explizite Form der Kurve $y(x)$ bzw. $x(y)$ an für die Randbedingungen $y_1 = -y_2 = y_0$ und $x_1 = x_2 = x_0$.