Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 20.5.2019, 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Erhaltungsgrößen (3 + 3 + 4 P.)

Geben Sie an, welche Komponenten des Impulses bzw. Drehimpulses bei der Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld der folgenden Massenverteilungen erhalten sind:

(a) Unendliche, homogene Ebene bei $z = 0$

(b) Homogener Kreisring um z-Achse

(c) Homogene Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung.

Aufgabe 2: Energie (10 P.)

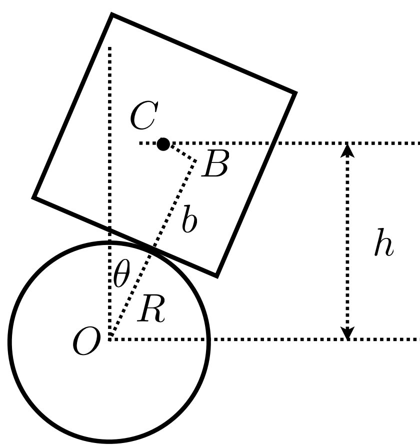
Bei der Ableitung der Energierhaltung in der Vorlesung haben wir angenommen, dass die Lagrange-Funktion von der Zeit unabhängig ist. Nehmen Sie jetzt an, dass das System einem *zeitabhängigen* Potential $U(q_1, \ldots . q_n; t)$ unterliegt. Berechnen Sie mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die zeitliche Änderung der Energie dE/dt und zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1}$$

(Hinweis: Verallgemeinern Sie die in der Vorlesung gezeigte Ableitung der Energieerhaltung.)

Aufgabe 3: Würfel auf Zylinder (5+5+0 P.)

Ein homogener Würfel (Seitenlänge $2b$) liege auf einem festgehaltenen Zylinder (Radius R) mit horizontaler Zylinderachse. Vier Seiten des Würfels seien parallel zur Zylinderachse ausgerichtet. Zunächst sei der Würfel vertikal oberhalb der Zylinderachse zentriert. Der Würfel soll auf dem Zylinder abrollen dürfen, aber nicht rutschen.



(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Würfels auf dem Zylinder, indem sie die potentielle Energie untersuchen.

(b) Wann ist das Gleichgewicht stabil, wann labil?

(c) Probieren Sie es aus.

Aufgabe 4: Molekülschwingungen (4+6 P.)

Eindimensionale Molekülschwingungen können oft durch ein Morse-Potential

$$V(x) = V_0[e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}] \tag{2}$$

beschrieben werden ($V_0, \alpha > 0$). Betrachtet werde ein Teilchen der Masse m, welches sich in einem solchen Morse-Potential bewegt und zur Anfangszeit t_0 am Ort x_0 anzutreffen ist. Ziel der Aufgabe ist es, die Art der Bewegung und die explizite Trajektorie $x(t)$ des Teilchens mit der Gesamtenergie E für die drei Fälle $E < 0$, $E = 0$ und $E > 0$ zu bestimmen. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

(a) Skizzieren Sie das Morse-Potential. Zeigen Sie mithilfe der Umkehrpunkte der Bewegung, für welche Energien jeweils gebundene und ungebundene Bewegung stattfindet.

(b) Berechnen Sie, wie in der Vorlesung für den allgemeinen Fall gezeigt, $t - t_0$ als Funktion von x und E. Führen Sie anschließend die Invertierung durch, um $x(t)$ zu erhalten. Beachten Sie die benötigten Fallunterscheidungen in den drei Fällen.

Hinweis: Bei der Lösung dürfte die Substitution $u = e^{\alpha x}$ hilfreich sein, um ein Integral zu erhalten, welches in üblichen Nachschlagewerken aufzufinden ist. (Allerdings ist das resultierende Integral mit ein wenig gutem Willen auch ohne tumbes Nachschlagen lösbar. Lehrreicher ist das allemal!)