Übungen zur Theoretischen Physik II — Sommer 2019, Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 27.5.2019, 14:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Lagrange-Multiplikatoren (5 + 5 P.)

Lösen Sie die folgenden Probleme mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren und bestimmen Sie die Zwangskräfte. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(a) Ein Teilchen der Masse m, das sich im Schwerefeld der Erde (Kraft wirkt in die negative z-Richtung) auf der horizontalen Ebene $z = 0$ bewegt.

(b) Perle der Masse m, die sich kräftefrei (d.h. ohne äußere Kräfte) auf einem kreisförmigen Draht (Radius R) bewegt.

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator (10 P.)

Bestimmen Sie die Bewegung $x(t)$ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators (Potential $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$) mit Hilfe der Energieerhaltung, indem sie der in der Vorlesung entwickelten allgemeinen Lösung eindimensionaler Probleme folgen. Wählen Sie als Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$, wobei x_0 die maximale Auslenkung des harmonischen Oszillators sei.

Aufgabe 3: Kettenlinie I (10 P.)

Wir haben in der Vorlesung gezeigt, dass eine hängende Kette der Form $y(x)$ das Funktional

$$S = \int_{-x_0}^{x_0} dx \left\{ (\mu g y + \lambda)\sqrt{1 + [y'(x)]^2} \right\} \tag{1}$$

minimiert, wobei λ ein Lagrange-Parameter ist, um die Nebenbedingung konstanter Kettenlänge L zu berücksichtigen. Da das Analogon der Lagrange-Funktion in diesem Beispiel nicht von der "Zeit" x abhängt, muss auch hier eine Entsprechung zur Energieerhaltung gelten: Zeigen Sie, dass die Größe

$$E = -\frac{\mu g y + \lambda}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \tag{2}$$

eine Erhaltungsgröße ist, d.h. dass sie nicht von x abhängt.

Aufgabe 4: Kettenlinie II (10 P.)

Berechnen Sie in Analogie zur allgemeinen Lösung eindimensionaler Probleme unter Benutzung der in Aufgabe 3 gefundenen Erhaltungsgröße E die Form der Kettenlinie. Nehmen die die Randbedingungen $y(\pm x_0) = y_0$ an.