# Übungen zur Theoretischen Physik II — Sommer 2019, Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 3.6.2019, 14:15 in der Vorlesung

**Aufgabe 1:** Hamilton-Mechanik (5 + 5 P.)

(a) Geben Sie die Hamilton-Funktion sowie die Hamilton-Gleichungen an für die ebene Bewegung eines Teilchens im Zentralkraftpotential. Benutzen Sie Polarkoordinaten.

(b) Zeigen Sie für dieses Problem im Rahmen des Hamilton-Formalismus (Poissonklammer), dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ und die Energie Konstanten der Bewegung sind.

**Aufgabe 2:** Perle auf rotierender Drahtschleife (7 + 3 P.)

Sie haben in den Aufgaben 2.3 und 2.4 die Bewegung einer Perle im Schwerefeld auf einer rotierenden Drahtschleife diskutiert. Die Lagrange-Funktion ergab sich zu

$$L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\phi}^2 + \omega^2 \sin^2 \phi) + mgR \cos \phi$$

(a) Bestimmen Sie den zu $\phi$ konjugierten Impuls $p_\phi$, die Hamilton-Funktion $H$ sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

(b) Ist $H$ die Energie des Systems? Diskutieren Sie das Ergebnis.

**Aufgabe 3:** Poisson-Klammern (1 + 1 + 2 + 2 + 2 +2 P.)

Beweisen Sie folgende Identitäten zwischen Poisson-Klammern:

(a) $\{f, g\} = -\{g, f\}$

(b) $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$

(c) $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$

(d) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

(e) $\{L_i, L_j\} = -\epsilon_{ijk} L_k$ ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ist der Drehimpuls). Sind also zwei Drehimpulskomponenten Erhaltungsgrgrößen, so ist es auch die dritte Komponente.

(f) Zeigen Sie, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen wieder eine Konstante der Bewegung ist, selbst wenn die Erhaltungsgrößen explizit von der Zeit abhängen!
*Hinweis:* Benutzen Sie die Jacobi-Identität aus Teilaufgabe (d).

**Aufgabe 4:** Kreisbahn im Zentralkraftfeld (2 + 2 + 3 + 3 P.)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $m$ in einem Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{c}{r^\alpha}$$

mit $\alpha < 2$, $\alpha \neq 0$, $c > 0$ für $\alpha > 0$ bzw. $c < 0$ für $\alpha < 0$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Komponenten $r$, $\theta$, $\phi$ des Vektors $\mathbf{r}$ in Kugelkoordinaten auf.

(b) Zeigen Sie, dass zu jedem Drehimpuls $\mathbf{L}$ des Teilchens eine Kreisbahn existiert. Berechnen Sie deren Radius $R$ und die Umlaufkreisfrequenz $\omega$.

(c) Zeigen Sie, dass die Kreisbahn aus (b) gegenüber kleinen radialen Störgungen stabil ist. Anleitung (lineare Stabilitätsanalyse): Schreiben Sie $r(t) = R + \delta r(t)$ sowie $\phi(t) = \omega t + \delta\phi(t)$ und entwickeln Sie die Bewegungsgleichungen bis zur ersten Ordnung in $\delta r(t)$, $\delta\phi(t)$. (Was passiert mit $\theta$?) Sie erhalten eine Bewegungsgleichung für die radiale Abweichung $\delta r(t)$. Diskutieren Sie das Verhalten der Lösungen für $\delta r(t)$.

(d) Für welche Werte von $\alpha$ bleibt die Bahn bei kleinen radialen Störungen geschlossen, d.h. periodisch? Vergleichen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Kreisfrequenz der Oszillationen (in $\delta r(t)$) um die Kreisbahn mit der Umlaufkreisfrequenz $\omega$.