Übungen zur Theoretischen Physik II Sommer 2019, Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 12.6.2019, 10:15 in der Vorlesung

Aufgabe 1: Fourier-Reihen (5 + 5 P.)

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe für eine periodische Sequenz $f(t)$ von Rechteckpulsen der Länge τ, der Periode $T = 2\pi/\Omega$ und der Stärke f_0. Die Pulssequenz sei symmetrisch unter $t \to -t$,

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

für $n \in Z$. Geben Sie zunächst die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\Omega t} \tag{2}$$

an und bestimmen Sie anschließend die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\Omega t) + c_n \sin(n\Omega t)]. \tag{3}$$

Diskutieren Sie, wie die Anzahl der relevanten Fourier-Koeffizienten von der Dauer τ der Pulse abhängt.

(b) Ensprechend für eine Sequenz von Sägezahn-Pulsen

$$f(t) = x - nT \qquad nT - T/2 < t < nT + T/2 \tag{4}$$

mit $n \in Z$.

Aufgabe 2: Dirac'sche δ-Funktion (3 + 3 + 4 P.)

Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Dirac'schen δ-Funktion:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x - x_0) \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(ax) \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x^2 - x_0^2) \end{aligned}$$

Ohne Punkte: Überzeugen Sie sich, dass Ihre Resultate mit der allgemeinen Formel

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\delta(x - x_i) \tag{5}$$

übereinstimmen, wobei die x_i die Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind und angenommen wird, dass die Ableitungen $g'(x_i)$ alle von Null verschieden sind. Können Sie diese Formel beweisen?

Aufgabe 3: Fourier-Reihe einer periodischen Sequenz von δ-Peaks (10 P.)

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der periodischen Funktion

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{6}$$

Aufgabe 4: Schwingungsfrequenz (10 P.)

Betrachten Sie ein Pendel mit Fadenlänge ℓ und Masse m_2. Zusätzlich sei am Aufhängepunkt eine Masse m_1, die horizontal entlang der x-Achse frei beweglich sei. Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenz des Pendels für kleine Auslenkungen den Wert

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{\ell}} \tag{7}$$

annimmt.