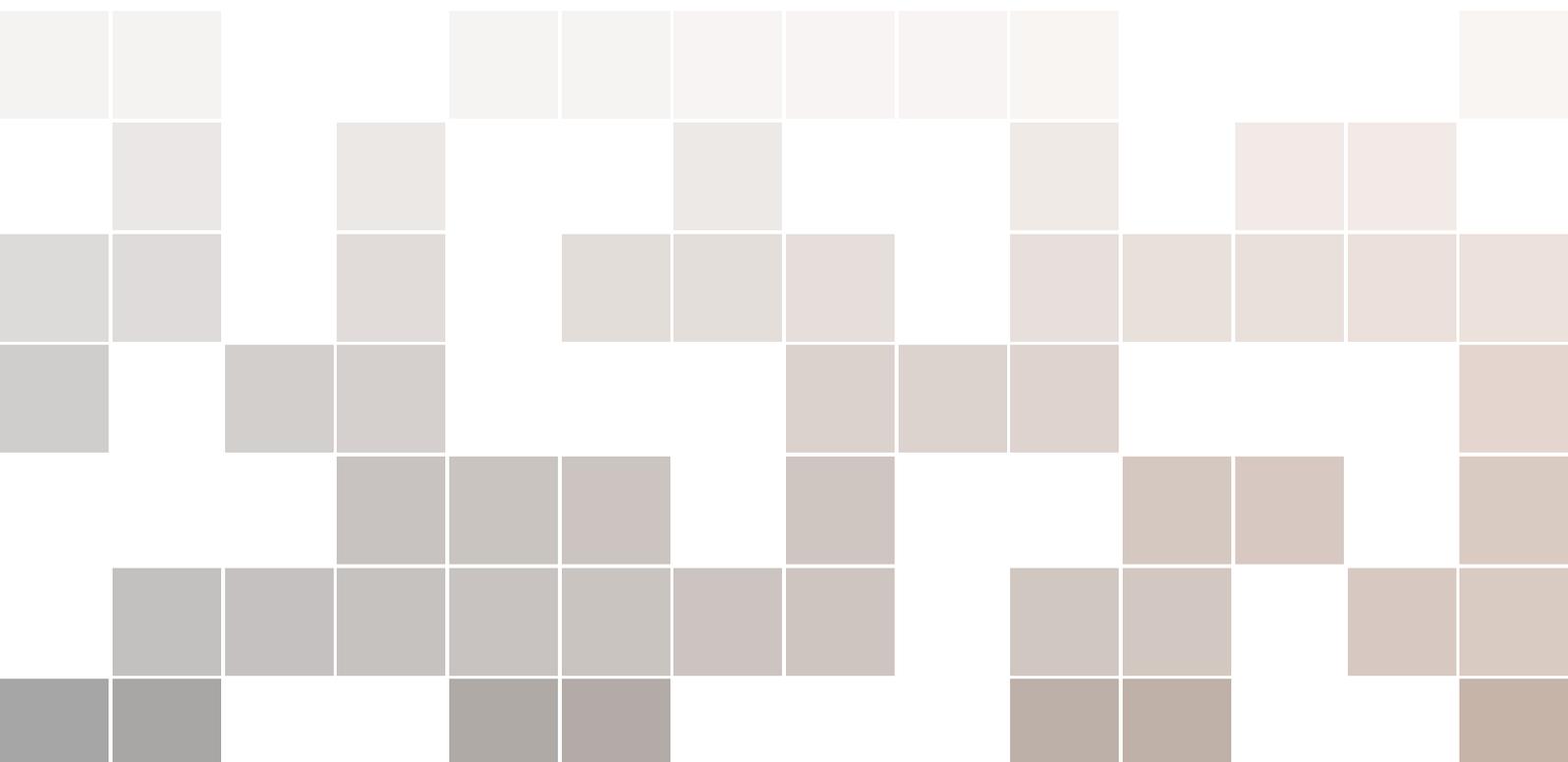


Brückenkurs

Das Skript

Felix von Oppen



Copyright © 2021 Felix von Oppen

Dieses Skript ist für die individuelle Nutzung vorgesehen und darf nicht ohne Zustimmung auf Webseiten oder anderweitig verbreitet werden.

Im Fluss

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	7
1.1	Mathematik und Physik	7
1.2	Kommende Attraktionen	8
1.3	Dank	10
2	Elementarmathematik	11
2.1	Der Satz des Pythagoras	11
2.2	Bruchrechnung	13
2.3	Rationale und irrationale Zahlen	14
2.4	Potenzrechnung	16
2.5	Binomische Formeln	19
2.6	Quadratische Gleichungen	22
2.7	Logarithmus	24
2.8	Trigonometrie	25
2.9	Trigonometrische Funktionen	29
2.10	Exponentialfunktion	33
2.11	Natürlicher Logarithmus	37
2.12	Polynomdivision	38
2.13	Funktionen	41
2.14	Aufgaben	44
3	Differentialrechnung	47
3.1	Ableitung	47

3.2	Existenz der Ableitung	51
3.3	Kurvendiskussion	53
3.4	Ableitung einfacher Funktionen	58
3.5	Ableitungsregeln	60
3.6	Umkehrfunktionen	64
3.7	Ableitung der Umkehrfunktionen	66
3.8	Differentiale	68
3.9	Aufgaben	72
4	Integralrechnung	75
4.1	Integrale	75
4.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	78
4.3	Uneigentliche Integrale	80
4.4	Partielle Integration	81
4.5	Substitution	84
4.6	Partialbruchzerlegung	88
4.7	Weierstraß-Substitution	91
4.8	Geometrische Anwendungen der Integralrechnung	92
4.9	Aufgaben	96
5	Mehr zur Differential- und Integralrechnung	101
5.1	Taylor-Reihe	101
5.2	Beispiele für Taylor-Reihen	105
5.3	Regel von L'Hospital	108
5.4	Hyperbelfunktionen	109
5.5	Area-Funktionen	112
5.6	Aufgaben	118
6	Vektoren und Matrizen	121
6.1	Vektoren	121
6.2	Skalarprodukt (inneres Produkt)	123
6.3	Kreuzprodukt (Vektorprodukt)	125
6.4	Spatprodukt	128
6.5	Analytische Geometrie	128
6.6	Vier Dimensionen	131
6.7	Lineare Gleichungssysteme	132
6.8	Aufgaben	136
7	Komplexe Zahlen	141
7.1	Lösbarkeit von Gleichungen	141
7.2	Komplexe Zahlen als Zahlenpaare	142
7.3	Darstellung komplexer Zahlen in algebraischer Form	144

7.4	Eulersche Formel	147
7.5	Aufgaben	148
	Index	151

1. Vorbemerkungen

1.1 Mathematik und Physik

Ziel dieses Kurses ist es, Ihnen vor Beginn des Physikstudiums noch einmal einen Überblick über die benötigte Schulmathematik zu geben. Physik und Mathematik sind eng verwoben und Sie werden feststellen, dass die in den Physikvorlesungen benötigte Mathematik schnell über die Schulmathematik hinausgeht. Sie werden damit umso weniger Schwierigkeiten haben, je solider Ihr Verständnis der Schulmathematik ist.

Sie kennen sicher das zweite Newtonsche Gesetz

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

das die auf einen Körper wirkende Kraft \mathbf{F} mit seiner Masse m und der Beschleunigung \mathbf{a} in Beziehung setzt. Kraft und Beschleunigung sind beides vektorielle Größen, die wir hier durch fettgedruckte Buchstaben wiedergeben. Die Beschleunigung kann auch als zweite Ableitung des Ortes \mathbf{r} nach der Zeit geschrieben werden, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. (Punkte über den Größen beschreiben, wie in der Mechanik seit Newton üblich, Ableitungen nach der Zeit.)

Sie könnten sich nun zum Beispiel für die Bewegung der Erde (Masse m) im Schwerfeld der (im Ursprung des Koordinatensystems ruhenden) Sonne (Masse M) interessieren. Dann ist die auf die Erde wirkende Kraft \mathbf{F} gegeben durch das Gravitationsgesetz

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

Hier bezeichnet \mathbf{r} den Ortsvektor der Erde (mit Länge r) und $\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{r}/r$ einen Einheitsvektor (Vektor der Länge 1) in Richtung der Verbindungslinie Sonne-Erde.

Setzen wir das Gravitationsgesetz in das zweite Newtonsche Gesetz ein, so muss die Bewegung der Erde um die Sonne die Gleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

erfüllen. Aus dieser Gleichung kann man zum Beispiel die drei Keplerschen Gesetze¹ ableiten. Sie bestimmt den Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ der Erde als Funktion der Zeit t und enthält sowohl die gesuchte Funktion $\mathbf{r}(t)$ als auch ihre Ableitungen (hier: $\dot{\mathbf{r}}$). Derartige Gleichungen heißen Differentialgleichungen.

Um diese Gleichung zu verstehen (und Sie müssen sie natürlich noch nicht genau verstehen), sollten wir offenbar sowohl etwas über Vektorrechnung als auch über Differentialrechnung² wissen. Zur Lösung der Differentialgleichung werden wir auch die Integralrechnung benötigen. Sie sehen, wie schnell wir von Ihnen bekannten Gleichungen wie dem zweiten Newtonschen Gesetz und dem Gravitationsgesetz zu recht involvierten mathematischen Problemen gelangen, die bereits Gegenstand der Physikvorlesungen im ersten Semester sind. Dieser Kurs soll Sie auf diese Herausforderungen vorbereiten.

1.2 Kommende Attraktionen

Dieser Kurs behandelt folgende Themen:

1. **Elementarmathematik:** Dieses Kapitel bespricht elementare Geometrie wie den Satz des Pythagoras, die Bruch- und Potenzrechnung, rationale und irrationale Zahlen, binomische Formeln, die Trigonometrie, den Logarithmus sowie elementare Funktionen. Damit dies nicht nur zu einer Wiederholung von Mittelstufenmathematik wird, werden wir einige einfache Beweise führen (Satz des Pythagoras, Irrationalität von $\sqrt{2}$, binomischer Lehrsatz) und mit der vollständigen Induktion ein Beweisverfahren vorstellen, das viele von Ihnen in der Schule vermutlich noch nicht kennengelernt haben.
2. **Differentialrechnung:** In diesem Kapitel wiederholen wir die Differentialrechnung. Dabei wird Wert darauf gelegt, die bekannten Ableitungen der elementaren Funktionen nicht nur anzugeben, sondern auch herzuleiten. Weiterhin werden wir auch die Rechenregeln für die Ableitung wie die Summen-, die Produkt- oder die Kettenregel nicht nur angeben, sondern auf der Basis der Definition der Ableitung beweisen.
3. **Integralrechnung:** Während das Differenzieren elementarer Funktionen letztlich ein schematischer Prozess ist, kann die Integration auch elementarer Funktionen schnell knifflig werden. In diesem Kapitel führen wir das Integral über die Riemann-Summe ein und stellen wichtige Integrationsverfahren vor. Auch hier legen wir Wert darauf, diese Verfahren nicht nur als Rezepte anzugeben, sondern zu begründen. Vermutlich werden Sie hier Integrationsverfahren finden, die Sie aus der Schule noch nicht kennen. Es kann aber gut sein, dass diese im Studium vorausgesetzt werden, bevor sie Ihnen beigebracht werden.
4. **Mehr zur Differential- und Integralrechnung:** Es gibt weitere mathematische Methoden, die in den Physikvorlesungen schnell gebraucht werden, aber über die Schulmathematik hinausgehen und in den Mathematikvorlesungen erst später behandelt werden. Ein solches Thema sind Taylor-Reihen, die Näherung bzw. Darstellung von Funktionen mittels Polynomen bzw. Potenzreihen. Dieses Kapitel gibt Ihnen zunächst eine Einführung in die Taylor-Reihe und behandelt auf dieser Grundlage die bekannte Regel von l'Hospital. In einem weiteren Abschnitt werden dann die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen besprochen. Diese Funktionen tauchen immer wieder auf und sind außerdem gut geeignet,

¹Die drei Keplerschen Gesetze lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen mit der Sonne in einem ihrer Brennpunkte.
2. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Strahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

²Genau genommen müssen wir sogar etwas über die Kombination von Vektor- und Differentialrechnung wissen, da hier Vektoren nach der Zeit abgeleitet werden.

um viele Themen der vorigen Kapitel zu illustrieren und anzuwenden.

5. **Vektorrechnung:** In diesem Kapitel werden zunächst Vektoren und ihre Rechenregeln anschaulich eingeführt. Wir führen die Rechenregeln geometrisch ein und leiten daraus die Koordinatendarstellungen ab. Dies gilt auch für das Skalar- und Kreuzprodukt von Vektoren. Die analytische Geometrie wendet Vektorrechnung an, um geometrische Gebilde zu beschreiben. Wir konzentrieren uns hier weitgehend auf zwei und drei Dimensionen, fügen aber auch einen Ausblick auf höhere Dimensionen hinzu, indem wir Ebenen und Hyperebenen sowie ihre Lagebeziehungen im vierdimensionalen Raum diskutieren. Das Kapitel schließt mit einer Diskussion linearer Gleichungssysteme.
6. **Komplexe Zahlen:** Im Zuge Ihrer Schullaufbahn haben Sie das Zahlensystem ausgehend von den natürlichen über die ganzen Zahlen bis zu den rationalen und reellen Zahlen erweitert. Damit ist aber noch nicht Schluss, auch wenn der Zahlenstrahl mit den reellen Zahlen voll ist. In diesem Kapitel geben wir eine erste Einführung in die komplexen Zahlen, die aus der Physik nicht wegzudenken sind und bereits in den Physikvorlesungen des ersten Semesters benutzt werden, um Schwingungen zu beschreiben.

Mathematik ist ebenso wenig ohne Training erlernbar wie eine Sportart oder ein Musikinstrument. Daher sind einige Übungen über die Kapitel verteilt und am Ende der Kapitel schließt sich eine längere Liste von Aufgaben an. Diese sind ein integraler Teil dieses Skripts. Ob man etwas wirklich verstanden hat, stellt sich erst dann heraus, wenn man es anzuwenden versucht. Es versteht sich von selbst, dass diese Aufgaben mit Papier und Bleistift gelöst werden sollten. Um im Bild zu bleiben: Wenn Sie dafür Ihren programmierbaren Taschenrechner, Mathematica oder sonstige Programme benutzen, sind Sie auch davon überzeugt, dass es ausreicht, die Sportschau anzusehen, um eine gute Sportlerin oder ein guter Sportler zu werden.

In diesem Kurs sollen möglichst viele Resultate mit angemessener intellektueller Redlichkeit begründet und hergeleitet werden.³ Allerdings bleibt dies ein Skript, das zum Auffrischen der für das Physikstudium notwendigen mathematischen Grundfertigkeiten gedacht ist. Da verbietet es sich schon aus Zeitgründen, in jedem Fall auf der logischen Abfolge zu bestehen und Aussagen mit mathematischer Strenge zu beweisen.⁴ Das bleibt den Mathematikvorlesungen vorbehalten. Dies gilt ganz besonders für die Konzepte des Grenzwertes und der Stetigkeit, die hier nur heuristisch benutzt werden und trotz ihrer zentralen Rolle in der Differential- und Integralrechnung nicht einmal im Ansatz auf eine formale Basis gestellt werden. Auch die Notation hält sich an das, was in der Schule oder in der Physik üblich ist. Mathematische Notation, die in der Physik unüblich ist, wie \forall (für alle) oder \exists (es existiert) wird ebenso den Mathematikvorlesungen überlassen.

Dieser Brückenkurs wird erfahrungsgemäß von einem Publikum mit heterogenen mathematischen Vorkenntnissen besucht. Um auch denjenigen, die bereits breite Vorkenntnisse haben, noch etwas zu bieten, werden an einigen Stellen Inhalte angesprochen, die eher selten in der Schule behandelt werden. Zur Orientierung werden Konzepte systematisch in drei Kategorien eingeteilt und bei der ersten Einführung entsprechend mit orangenen Sternen gekennzeichnet:

- * Das Konzept wird in den Physikvorlesungen als aus der Schule bekannt vorausgesetzt.
- ** Das Konzept geht über den üblichen Schulstoff hinaus, spielt aber bereits in den Physikvorlesungen der ersten Semester eine wichtige Rolle.
- *** Das Konzept geht über den üblichen Schulstoff hinaus, ist mathematisch interessant, spielt aber in den Physikvorlesungen der ersten Semester keine zentrale Rolle.

³Dies ist nicht gleichbedeutend mit der Aussage, dass alles auch intellektuell redlich dargestellt ist. Sollten Ihnen Fehler auffallen, bitte ich darum, mich auf diese aufmerksam zu machen.

⁴Ein Physiker, ein Mathematiker und ein Ingenieur fahren im Zug durch Schottland. Sie sehen durch das Fenster ein schwarzes Schaf auf einer Weide. Der Ingenieur sagt erstaunt: "Oh, in Schottland sind die Schafe schwarz." Der Physiker verbessert: "Wir wissen nur, dass es in Schottland schwarze Schafe gibt". Der Mathematiker seufzt: "In Schottland gibt es auf mindestens einer Weide mindestens ein Schaf, das auf mindestens einer Seite schwarz ist".

Die mit einem Stern markierten Konzepte stellen also das minimal notwendige mathematische Grundwissen dar.

Mathematik ist aber nicht nur nützlich (oder gar ein notwendiges Übel) für das Physik-Studium, sondern (ebenso wie die Physik) ein intellektuelles Abenteuer. Viel Spaß!

1.3 Dank

Eine erste, rudimentäre Version dieses Skripts wurde vor vielen Jahren von Jens Koch erstellt.⁵ Ohne seinen Einsatz gäbe es auch dieses erweiterte Skript nicht. Bei der Ausarbeitung dieser stark erweiterten Version hat Alexander-Georg Penner Hilfestellung geleistet, insbesondere indem er viele der Abbildungen erstellt und die Formeln in Latex gesetzt hat. Beiden bin ich zu großem Dank verpflichtet.

⁵Graue Schrift deutet auf einen in die pdf-Datei eingefügten Link hin.

2. Elementarmathematik

2.1 Der Satz des Pythagoras

Der *Satz des Pythagoras*^{*} beschäftigt sich mit den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks und ist die Grundlage für viele Aussagen der Elementargeometrie. Er ist leicht zu beweisen und wir wollen diesen Beweis hier auch führen.

In einem rechtwinkligen Dreieck (Abb. 2.1) bezeichnet man die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, als *Hypotenuse*^{*}. Die beiden anderen, am rechten Winkel anliegenden Seiten heißen *Katheten*^{*}. Die an den Winkeln α und β anliegenden Katheten bezeichnet man als *Ankathete*^{*} des Winkels, die gegenüberliegende Kathete als *Gegenkathete*^{*}. Da die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks 180° ergibt, gilt in einem rechtwinkligen Dreieck $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Bezeichnen wir in einem solchen rechtwinkligen Dreieck die Länge der beiden Katheten mit a und b und die der Hypotenuse mit c , so gilt der

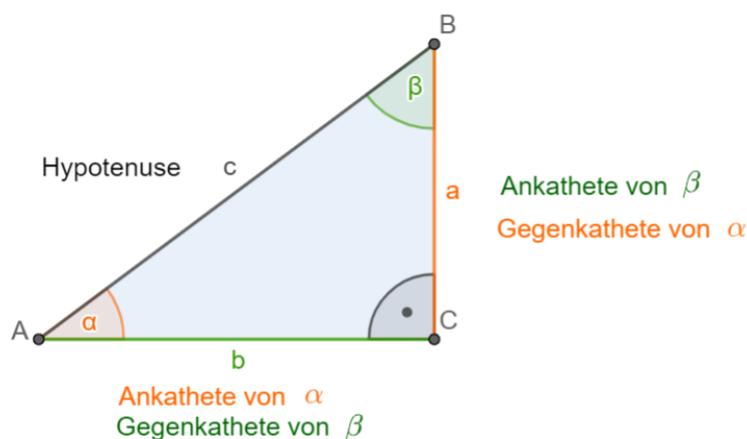


Abbildung 2.1: Rechtwinklige Dreiecke: Nomenklatur.

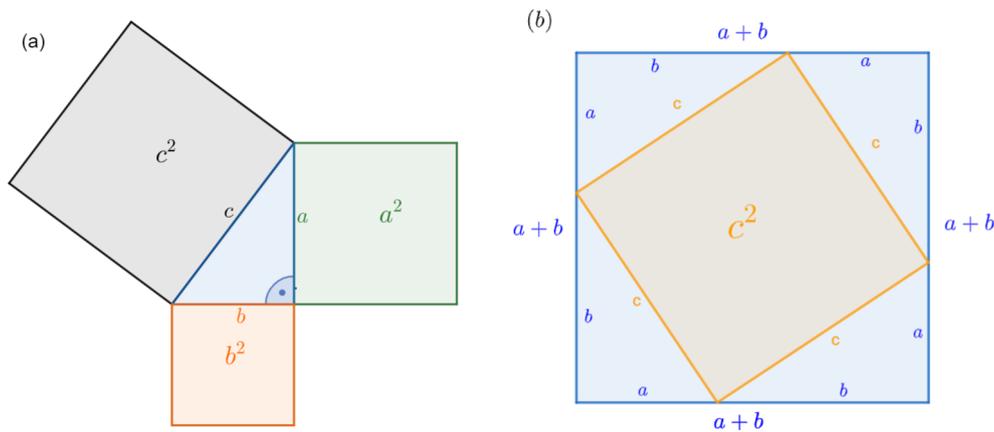


Abbildung 2.2: Satz des Pythagoras. (a) Die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse (grau) ist gleich der Summe der Flächen (orange und grün) über den Katheten, als Formel $a^2 + b^2 = c^2$. (b) Skizze zum Beweis des Satz des Pythagoras.

Satz des Pythagoras

Die Fläche des Quadrats über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Geometrisch wird dies in Abb. 2.2(a) veranschaulicht. Ein Veranschaulichungsvideo finden Sie unter diesem [Link](#).

Zum Beweis betrachten wir die Abb. 2.2(b). Wir beginnen mit einem Quadrat der Seitenlänge $a + b$ und schreiben in dieses Quadrat in der gezeigten Weise ein kleineres Quadrat (orange) der Seitenlänge c ein. Hierdurch werden die vier Seiten in jeweils zwei Teilstrecken der Länge a und b geteilt, und es entstehen in den vier Ecken identische rechtwinklige Dreiecke (blau) mit Katheten der Länge a und b und Hypotenuse der Länge c .

Die Fläche $(a + b)^2$ des großen Quadrats der Seitenlänge $a + b$ ist offenbar gleich der Fläche c^2 des kleineren Quadrats plus dem Vierfachen der Fläche $ab/2$ eines der rechtwinkligen Dreiecke,

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}. \quad (2.1)$$

Multiplizieren wir die linke Seite dieser Gleichung aus (binomische Formel) und kürzen auf der rechten Seite, so erhalten wir

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab. \quad (2.2)$$

Ziehen wir schließlich von beiden Seiten $2ab$ ab, so ergibt sich tatsächlich $a^2 + b^2 = c^2$ und damit der Satz des Pythagoras.

Übung: Gegeben sei ein Quadrat mit Seitenlänge a . Berechnen sie die Länge der Diagonale mithilfe des Satz des Pythagoras.

Betrachten Sie anschließend einen Würfel der Seitenlänge a und berechnen Sie die Länge der Raumdiagonale.

Wie lang ist die Raumdiagonale eines Würfels mit Kantenlänge a in D Dimensionen?

Übung: Berechnen Sie die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a .

Übung: Geben Sie eine implizite Gleichung für die Koordinaten (x, y) eines Kreises mit Radius R und Mittelpunkt in (x_0, y_0) an.

Übung: An einem Körper greifen zwei orthogonal aufeinander stehende Kräfte von 3N und 4N an. Wie groß ist der Betrag der auf den Körper wirkenden Gesamtkraft?

Dreiecke auf der Kugeloberfläche.

Der Satz über die Winkelsumme sowie der Satz des Pythagoras beziehen sich auf ebene Dreiecke. Die Aussagen gelten beispielsweise nicht für Dreiecke auf einer Kugeloberfläche, wobei die Seiten die kürzesten Verbindungen zwischen den Eckpunkten sind (d.h. Segmente von Großkreisen). Betrachten wir ein Dreieck auf der Erdoberfläche mit zwei Eckpunkten auf dem Äquator, deren Längengrade um 90° auseinanderliegen, sowie dem Nordpol als drittem Eckpunkt. Dieses Dreieck hat drei rechte Winkel und somit die Winkelsumme 270° . Außerdem haben alle drei Seiten die gleiche Länge, so dass sicher $a^2 + b^2 \neq c^2$.

2.2 Bruchrechnung

Einfache Brüche wie

$$\frac{a}{b} \tag{2.3}$$

mit ganzen Zahlen a und b (d.h. $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$) bestehen aus dem Zähler a und dem Nenner b . Die Brüche bilden die Menge \mathbb{Q} der *rationalen Zahlen**. Brüche kann man addieren, multiplizieren und dividieren:

Grundregeln der Bruchrechnung

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Diese Rechenregeln gelten natürlich auch dann, wenn Zähler und Nenner keine ganzen, sondern beliebige reelle (oder sogar komplexe) Zahlen sind.

Die erste der Grundregeln besagt, dass Brüche addiert werden, indem man sie auf einen gemeinsamen Nenner bringt. Ein möglicher gemeinsamer Nenner ist immer das Produkt der Nenner der beiden Brüche.

Übung: Ein beliebter Fehler ist es, Zähler und Nenner separat zu addieren. Man sieht einfach,

dass dies nicht stimmen kann, indem man Zahlen einsetzt:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Wenn Sie diesen Fehler machen, laufen Sie also Gefahr, für zwei 50ct Stücke nur eines wieder zurückzubekommen. Allgemeiner können Sie sich mithilfe der Rechenregeln für Brüche davon überzeugen, dass Sie mit diesem Fehler immer verlieren, da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d} \quad (2.5)$$

für beliebige $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Die zweite Grundregel der Bruchrechnung besagt, dass man im Gegensatz zur Addition bei der Multiplikation zweier Brüche einfach Zähler und Nenner separat multiplizieren darf. Diese Regel impliziert auch die Möglichkeit, Brüche zu kürzen, wenn Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor haben. So gilt beispielsweise

$$\frac{21}{14} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{7} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad (2.6)$$

Die dritte Grundregel besagt schließlich, dass man zwei Brüche dividiert, indem man den Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert. Sie können sich von der Richtigkeit dieser Operation überzeugen, indem Sie linke und rechte Seite mit c/d multiplizieren.

Übung: Drücken Sie den Gesamtwiderstand R einer Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 durch einen Bruch aus, d.h. lösen sie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.7)$$

nach R auf. (Sie können auch gleich Ihre Physikkenntnisse auffrischen, indem Sie zeigen, wie Glg. (2.7) für die Parallelschaltung zweier Widerstände aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt.)

2.3 Rationale und irrationale Zahlen

Jede natürliche Zahl ist ein Bruch (denn $n = \frac{n}{1}$). Aber offensichtlich ist nicht jeder Bruch eine natürliche Zahl. Trotzdem gibt es in einem gewissen Sinne genauso viele (positive) rationale Zahlen wie es natürliche Zahlen gibt. Wie wir gleich sehen werden, kann man nämlich die rationalen Zahlen einfach durchnummerieren. Dieses auf den ersten Blick seltsame Ergebnis beruht natürlich auf der Tatsache, dass die Menge der natürlichen Zahlen ebenso wie die Menge der rationalen Zahlen unendlich groß sind. Man sagt, dass die Menge der rationalen Zahlen *abzählbar unendlich*** ist. Das Durchnummerieren der (positiven) rationalen Zahlen beruht auf dem sogenannten *Cantorschen Diagonalargument*** . Dies wird in Abb. 2.3 dargestellt und in der Bildunterschrift erklärt.

Mathematischer gesprochen gibt es eine *bijektive Abbildung*** zwischen der Menge \mathbb{N} der natürlichen und der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen.¹ Bei einer solchen Abbildung ist jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet. In diesem Sinne sind beide Mengen gleich groß. Genauer sagt man, dass beide Mengen *gleich mächtig*** sind.

¹Man unterscheidet injektive, surjektive und bijektive Abbildungen. Eine Abbildung von einer Menge A (Urbilder) in eine Menge B (Bilder) heißt *injektiv*** , wenn sich eindeutig vom Bild auf das Urbild zurückschließen lässt, aber nicht notwendigerweise jedes mögliche Bild auch angenommen wird. Abbildungen heißen *surjektiv*** , wenn jedes Element der Bildmenge mindestens einmal angenommen wird. Abbildungen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind, nennt man bijektiv.

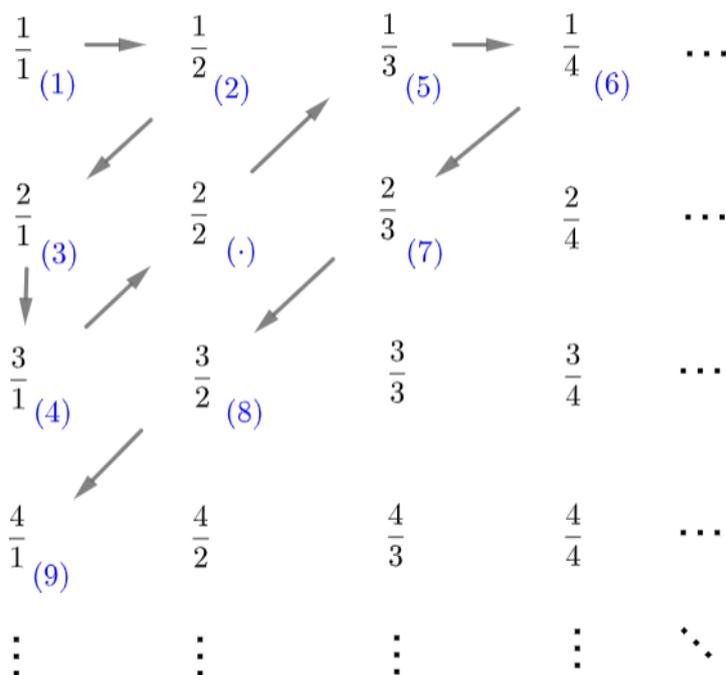


Abbildung 2.3: Cantors (erstes) Diagonalargument. Die positiven rationalen Zahlen werden im dargestellten Raster angeordnet. Entlang der (waagerechten) Reihen nimmt der Nenner der Brüche zu, entlang der (senkrechten) Spalten wächst der Zähler. Auf diese Weise enthält das Schema alle positiven Brüche. Dies kann dann auf die Menge der positiven rationalen Zahlen reduziert werden, indem alle Brüche herausgestrichen werden, die noch gekürzt werden können (hier angezeigt durch ein nebenstehendes (·) in blau). Die verbleibenden Brüche können nun abgezählt werden, indem man ihnen gemäß dem gezeigten Schema entlang der blauen Pfeile natürliche Zahlen zuordnet (nebenstehend in Klammern und blau). Dies erlaubt eine (bijektive) Abbildung, bei der jeder rationalen Zahl genau eine natürliche Zahl zugeordnet wird. Man sagt, dass die Mengen der rationalen und der natürlichen Zahlen gleich mächtig sind.

Wir können nun fragen, ob alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl Brüche sind. Dies ist nicht der Fall. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl. Also ist insbesondere die Länge der Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 keine rationale Zahl. Der Beweis dieser Aussage ist das klassische Beispiel eines *Widerspruchsbeweises*. Bei einem solchen Widerspruchsbeweis nimmt man zunächst an, dass das Gegenteil der Aussage wahr ist und zeigt, dass dies auf einen Widerspruch führt.

Nehmen wir also an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Dann können wir $\sqrt{2}$ als Bruch

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (2.8)$$

mit natürlichen Zahlen p und q darstellen. Weiterhin können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind, der Bruch also nicht weiter gekürzt werden kann. Sollten p und q nicht teilerfremd sein, so würden wir zunächst diesen gemeinsamen Teiler aus dem Bruch herauskürzen. Damit können wir solange fortfahren, bis Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen.

Quadrieren wir nun Glg. (2.8), so erhalten wir

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2.9)$$

und damit

$$p^2 = 2q^2. \quad (2.10)$$

Also ist p^2 und somit auch p eine gerade Zahl. (Das Quadrat einer ungeraden Zahl wäre ungerade.) Weiterhin gilt, dass

$$q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{p}{2} \cdot p. \quad (2.11)$$

Da p gerade ist, ist also auch q^2 gerade. (Denn q^2 ist offenbar das Produkt zweier Zahlen, von denen mindestens eine gerade ist.) Somit ist wiederum auch q eine gerade Zahl. Damit folgt aber, dass p und q einen gemeinsamen Teiler haben, nämlich 2, und der Bruch p/q im Gegensatz zur Annahme nicht teilerfremd ist.

Die Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational, führt also auf einen Widerspruch. Somit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein. Man sagt, $\sqrt{2}$ ist eine *irrationale Zahl*^{*}, und bezeichnet die Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen als die Menge der *reellen Zahlen*^{*} \mathbb{R} . Es zeigt sich, dass es auf dem Zahlenstrahl keine weiteren Zahlen gibt.

Übung: Welcher Schritt dieses Beweises gilt nicht, wenn man ihn für $\sqrt{4}$ wiederholen wollte?

2.4 Potenzrechnung

Eine *Potenz*^{*}

$$a^x \quad (2.12)$$

besteht aus der *Basis* a und dem *Exponenten*^{*} x . Ist der Exponent eine natürliche Zahl n , so gilt natürlich

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} \quad (2.13)$$

Übung: Denken Sie, bevor Sie weiterlesen, darüber nach, wie Potenzen mit rationalen und reellen Exponenten definiert sind.

Dies sind die wesentlichen Rechenregeln:

Regeln der Potenzrechnung

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Insbesondere geht aus den letzten beiden Regeln auch hervor, wie Potenzen mit Exponenten erklärt sind, die keine natürlichen Zahlen sind.²

Die Regel $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ erweitert die Tatsache, dass

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ Faktoren}} = a^{n+m}. \quad (2.14)$$

Bitte beachten Sie, dass hier die Basis der beiden Faktoren gleich sein muss! Ebenso erweitert $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ die Tatsache, dass

$$(a^n)^m = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ Faktoren}}^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \cdot m \text{ Faktoren}} = a^{n \cdot m}. \quad (2.15)$$

In beiden Fällen wird also gewissermaßen eine kompliziertere auf eine einfachere Rechnung zurückgeführt. Die (kompliziertere) Multiplikation der Potenzen reduziert sich auf die (einfachere) Addition der Exponenten. Die (kompliziertere) Potenzierung der Potenz wird zur Multiplikation der Exponenten.

Sind die Basen der Potenzen ungleich, so kann man den Ausdruck nur dann direkt vereinfachen, wenn die Exponenten übereinstimmen, $a^x \cdot b^x = (ab)^x$. Dies verallgemeinert

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdots (ab)}_{n \text{ Faktoren}} = (ab)^n \quad (2.16)$$

Unterscheiden sich sowohl die Basen als auch die Exponenten, so lässt sich der Ausdruck nicht unmittelbar vereinfachen.

Die Regel $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ verallgemeinert

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ Faktoren}}} = a^{n-m} = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-m \text{ Faktoren}} & n \geq m \\ \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-n \text{ Faktoren}}} & n < m \end{cases} \quad (2.17)$$

Diese Regel gilt für positive und negative Exponenten $n - m$, sofern man negative Exponenten mittels

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (2.18)$$

erklärt. Weiterhin folgt dann auch, dass

$$a^0 = 1. \quad (2.19)$$

Schließlich müssen wir noch diskutieren, wie Potenzen mit gebrochenzahligen Exponenten erklärt werden. Wenden wir die Rechenregeln für Potenzen einfach an, so sollte beispielsweise

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a \quad (2.20)$$

gelten. Wir können also $a^{1/2}$ mit \sqrt{a} identifizieren. Entsprechendes gilt für $a^{1/q}$ und $\sqrt[q]{a}$, so dass

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (\sqrt[q]{a})^p \quad (2.21)$$

²Streng genommen gilt dies zunächst einmal nur für Exponenten in der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Potenzen mit irrationalen Exponenten können dann erklärt werden, indem man Folgen von rationalen Zahlen nutzt, die gegen die irrationale Zahl konvergieren.

Übung: Zeigen Sie, dass h/e^2 mit dem Planckschen Wirkungsquantum $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js und der Elektronenladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C die Einheiten eines elektrischen Widerstands (sprich: Ohm) hat und berechnen Sie diesen Quantenwiderstand R_Q .^a

^aPhysik-Nobelpreis 1985 (Klaus v. Klitzing): Der Hall-Widerstand ist in ungeordneten zweidimensionalen Elektronensystemen mit extremer Präzision gleich h/ne^2 , wobei $n = 1, 2, 3 \dots$ eine natürliche Zahl ist.

2.5 Binomische Formeln

Die *binomischen Formeln** erhält man durch direktes Ausmultiplizieren der Faktoren:

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Allgemeiner gilt der *binomische Lehrsatz***:

Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \quad (2.26)$$

Zur Notation:

- Das *Summenzeichen** summiert den nebenstehenden Term über den unten angegebenen Index, hier j . Die Summe beginnt mit dem Wert, der unten angegeben wird (hier: 0) und endet mit dem oben stehenden Wert (hier: n). Also beispielsweise:

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (2.27)$$

oder konkret $\sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

- Die *Fakultät** $n!$ ist definiert als das Produkt aller natürlichen Zahlen bis n , also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \quad (2.28)$$

So ist beispielsweise

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \quad (2.29)$$

Man definiert außerdem $0! = 1$.

- $\binom{n}{j}$ (sprich: n über j) mit $n \geq j$ und $n, j \in \mathbb{N}$ ist ein *Binomialkoeffizient** und definiert als

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \quad (2.30)$$

Die Binomialkoeffizienten können auch aus dem *Pascalschen Dreieck** gewonnen werden:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

Hier ist n durch die Zeile (beginnend mit $n = 0$) gegeben, j wird innerhalb der Zeilen beginnend mit $j = 0$ durchgezählt. Jeder Eintrag in dieser Pyramide ist die Summe der beiden in der vorhergehenden Zeile benachbarten Zahlen.

Übung: Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dieser Berechnung der Binomialkoeffizienten und der Formel $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ her. Zeigen Sie also, dass

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j} \quad (2.31)$$

Für $n = 3$ führt der binomische Lehrsatz beispielsweise auf die Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (2.32)$$

Sie können sich davon natürlich auch durch direktes Ausmultiplizieren überzeugen.

Übung: Berechnen Sie $(a+b)^2$ mittels binomischem Lehrsatz und vergleichen Sie mit der binomischen Formel. Berechnen Sie außerdem $(a+b)^4$ durch direktes Ausmultiplizieren und vergleichen Sie Ihr Ergebnis wiederum mit dem binomischen Lehrsatz.

Wir wollen nun noch den binomischen Lehrsatz beweisen. Derartige Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen n gelten, werden häufig mittels *vollständiger Induktion**** bewiesen. Bei diesem Verfahren prüft man zunächst, ob die Aussage für den Anfangswert $n = 1$ gilt (*Induktionsanfang****). Im zweiten Schritt (*Induktionsschritt****) zeigt man dann, dass die Aussage für $n+1$ gilt, sofern sie für n gilt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt, dass die Aussage für alle n gelten muss. Denn da die Aussage für $n = 1$ gilt, muss sie auch für $n = 2$ gelten. Aber wenn sie für $n = 2$ gilt, muss sie auch für $n = 3$ gelten. Und so weiter und so fort.³

Lassen Sie uns das zunächst an einem einfachen Beispiel illustrieren. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die *Gaußsche Summenformel***

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.33)$$

Sie können sich von dieser Formel einfach überzeugen, indem Sie die Terme der Summe in

³(i) Ein Studierender, der von monatlich 825€ BAFöG lebt, ist ein armer Schlucker.

(ii) Wenn das BAFöG eines armen Schluckers um 1€ erhöht wird, ist er immer noch arm.

(iii) Es folgt mit vollständiger Induktion: Egal, wie hoch das BAFöG ist, Studierende sind arme Schlucker.

Wo ist der Fehler der Argumentation? Eigentlich gibt es keine gute Erklärung. Die Politik scheint das Dilemma zu lösen, indem sie die Prämisse anzweifeln: Das BAFöG ist in seiner jetzigen Form sehr großzügig. Damit ist der Induktionsanfang gar nicht erst gegeben.

Quelle: <http://home.teleos-web.de/akracht/anders/witze.html>

umgekehrter Reihenfolge untereinander schreiben:⁴

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{array} \quad (2.34)$$

Sie erhalten nun das Zweifache der gesuchten Summe, indem sie alle Zahlen aufaddieren. Addieren Sie zunächst die übereinander stehenden Zahlen, so erhalten Sie immer dasselbe Ergebnis, nämlich $n+1$. Insgesamt gibt die Summe aller Zahlen also $n(n+1)$. Die Hälfte davon ist dann die gesuchte Summe.

Der Beweis per vollständiger Induktion geht folgendermaßen. Zunächst prüfen wir, ob die Aussage für $n=1$ gilt. Dann enthält die Summe nur einen Term, $\sum_{j=1}^1 j = 1$. Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir $n=1$ in $\frac{n(n+1)}{2}$ einsetzen.

Nun folgt der eigentliche Induktionsschritt. Wir setzen voraus, dass die Aussage für n gilt, also

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.35)$$

und wollen zeigen, dass sie daraus für $n+1$ folgt, also

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (2.36)$$

Hierzu schreiben wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) \\ &= \sum_{j=1}^n j + (n+1). \end{aligned}$$

Da wir voraussetzen dürfen, dass die Aussage für n gilt, können wir die Summe in der zweiten Zeile mittels Glg. (2.35) ersetzen. Tun wir dies und formen weiter um, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Aussage in Glg. (2.37) für $n+1$. Wir haben also auch den eigentlichen Induktionsschritt gezeigt, so dass die zu beweisende Aussage in Glg. (2.33) für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss.

Mit dieser Vorbereitung können wir nun den Beweis des binomischen Lehrsatzes per vollständiger Induktion angehen. Auch wenn die Rechnungen etwas umfangreicher (und vielleicht aufgrund des Summenzeichens etwas weniger vertraut) sind, so folgen sie doch dem gleichen Schema.

Wir prüfen zunächst den Induktionsanfang, d.h. die Aussage in Glg. (2.26) für $n=1$. Dann wird $(a+b)^1 \rightarrow a+b$. Das gleiche Resultat erhält man für die rechte Seite des binomischen Lehrsatzes,

$$\sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} a^j b^{1-j} = a + b. \quad (2.37)$$

⁴Der Legende nach wollte der Volksschullehrer Gauß und seine Mitschüler eine Weile beschäftigen und hat sie gebeten, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Gauß war in Windeseile fertig, weil er nicht wie der Lehrer Zahl für Zahl addiert hat.

Der Induktionsschritt erfordert (wie üblich) mehr Aufwand. Wir schreiben zunächst

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \quad (2.38)$$

und benutzen für den zweiten Faktor nach Induktionsvoraussetzung die Glg. (2.26). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1}. \end{aligned}$$

Im ersten Term in der letzten Zeile verschieben wir nun den Summationsindex so, dass er nicht mehr von Null bis n läuft, sondern von 1 bis $n+1$. Entsprechend ersetzen wir im Summanden j durch $j-1$ und erhalten

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j}. \end{aligned}$$

Hier haben wir in der zweiten Zeile den Summanden mit $j = n+1$ des ersten Terms sowie den Summanden mit $j = 0$ des zweiten Terms separat angeschrieben und die resultierenden Summen zu einer Summe zusammengefasst, da die Summationsindizes nun wieder über den gleichen Bereich laufen. Nun können wir die Identität (s. Pascalsches Dreieck)

$$\begin{aligned} \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{j \cdot n! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{j!(n+1-j)!} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j}, \end{aligned}$$

ausnutzen und erhalten schließlich⁵

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}. \end{aligned}$$

Dies ist nun gerade die Aussage des binomischen Lehrsatzes für den Exponenten $n+1$, so dass wir den Induktionsschritt erfolgreich gezeigt haben.

2.6 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen mit der Struktur

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.39)$$

werden durch die *pq-Formel*^{*} gelöst:

⁵Wir nutzen hier auch noch aus, dass $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ sowie $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ ist.

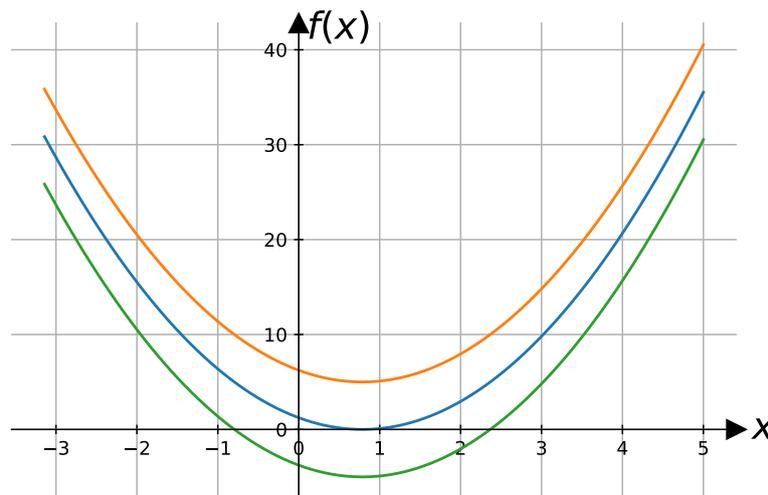


Abbildung 2.4: Graphische Veranschaulichung der Lösungsmenge quadratischer Gleichungen. Die Lösungen der quadratischen Gleichung können als Nullstellen von Parabeln interpretiert werden. Die orangene Parabel hat keine, die blaue eine und die grüne zwei Nullstellen. Entsprechend haben die korrespondierenden quadratischen Gleichungen keine, eine oder zwei Lösungen.

Die pq -Formel

Eine quadratische Gleichung mit $p, q \in \mathbb{R}$ hat die zwei Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad (2.40)$$

sofern die Wurzel auf der rechten Seite existiert.

Aufgrund der Wurzel kann eine quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben.⁶ Zwei Lösungen existieren, sofern $p^2/4 > q$. In diesem Fall ist das Argument der Wurzel positiv und von Null verschieden. Eine Lösung existiert für den Fall, dass $p^2/4 = q$. Keine Lösung gibt es schließlich, wenn $p^2/4 < q$ und die Wurzel nicht existiert.

Diese drei Fälle haben eine einfache graphische Interpretation. Die quadratische Gleichung kann als Gleichung für die Nullstellen der Parabel

$$f(x) = x^2 + px + q \quad (2.41)$$

betrachtet werden. Je nachdem, ob der Scheitelpunkt der Parabel unterhalb, oberhalb oder genau auf der reellen Achse liegt, findet man zwei, keine oder eine Nullstelle. Diese drei Fälle werden in Abb. 2.4 illustriert.

Die Herleitung der pq -Formel verwendet die *quadratische Ergänzung*^{*}:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q \\ &= x^2 + px + q + \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}\right) \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

⁶Dies gilt für Lösungen in den reellen Zahlen. Im Rahmen der komplexen Zahlen haben quadratische Gleichungen immer zwei Lösungen, s. Kap. 7.

Hier haben wir in der zweiten Zeile eine Null (den Term in Klammern) derart hinzuaddiert, dass wir die binomische Formel benutzen können. Stellen wir nun die Gleichung um, so erhalten wir

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und berücksichtigen wir, dass die Wurzel beide Vorzeichen annehmen kann, so wird dies zu

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lösen wir schließlich nach x auf, so ergibt sich die pq -Formel (2.40).

Eine Alternative zur pq -Formel ist die sogenannte *abc-Formel**:

abc-Formel

Quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.42}$$

haben die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.43}$$

Natürlich kann die quadratische Gleichung in dieser Form auf die Form (2.39) zurückgeführt werden, indem man die Gleichung durch a teilt. Sie brauchen sich also nur entweder die pq - oder die *abc-Formel* zu merken.

Übung: Leiten sie die *abc-Formel* mittels quadratischer Ergänzung her.

2.7 Logarithmus

Möchte man eine Zahl $y > 0$ als Potenz zur Basis a ausdrücken,

$$y = a^x, \tag{2.44}$$

so bezeichnet man den Exponenten x als *Logarithmus** von y zur Basis a ,

$$x = \log_a y. \tag{2.45}$$

Man beachte, dass (im Rahmen der reellen Zahlen) nur der Logarithmus von positiven Zahlen definiert ist.

Der Logarithmus ist die Umkehroperation zur Potenz. Führt man Potenz und Logarithmus (zur gleichen Basis) hintereinander aus, so bekommt man wieder das ursprüngliche Argument. Denn aus den Glg. (2.44) und (2.45) folgt unmittelbar, dass

$$x = \log_a a^x \tag{2.46}$$

sowie

$$y = a^{\log_a y}. \tag{2.47}$$

Übung: Sie sind eine Starinvestorin bzw. ein Starinvestor und verdoppeln Ihr Vermögen jedes Jahr. Wie lange brauchen Sie, bis Sie so reich sind wie Bill Gates heute ($\approx 10^{11}$ €), wenn Sie mit 1 € beginnen?

Die Rechenregeln für den Logarithmus folgen aus den Regeln der Potenzrechnung:

Logarithmus-Rechenregeln

Für positive reelle Zahlen A und B gilt:

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

$$\log_a(A^b) = b \log_a A$$

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

Um diese Rechenregeln abzuleiten, setzen wir $A = a^x$ und $B = a^y$ (und somit $x = \log_a A$ und $y = \log_a B$). Die erste Regel folgt dann aus der Regel $a^x a^y = a^{x+y}$ für Produkte von Potenzen. Nehmen wir auf beiden Seiten den Logarithmus zur Basis a , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \log_a(A \cdot B) &= \log_a(a^x a^y) \\ &= \log_a a^{x+y} \\ &= x + y \\ &= \log_a A + \log_a B. \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Regel folgt analog aus der Identität $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{A}{B} &= \log_a \frac{a^x}{a^y} \\ &= \log_a a^{x-y} \\ &= x - y \\ &= \log_a A - \log_a B. \end{aligned}$$

Die dritte Regel kann wie folgt aus $(a^x)^b = a^{bx}$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \log_a A^b &= \log_a (a^x)^b \\ &= \log_a a^{bx} \\ &= bx \\ &= b \cdot \log_a a^x \\ &= b \cdot \log_a A. \end{aligned}$$

Die Herleitung der letzten Identität schließlich ist eine Übungsaufgabe:

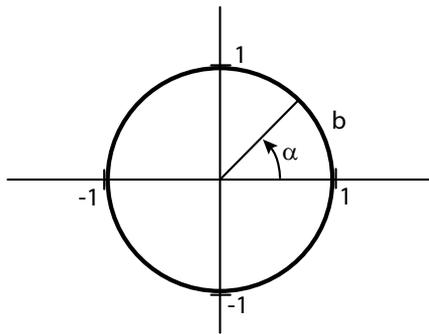
Übung: Drücken Sie $\log_b x$ durch Logarithmen zur Basis a aus.

2.8 Trigonometrie

Winkel können nicht nur in der (recht willkürlichen) Gradskala, sondern auch im (geometrisch besser motivierten) *Bogenmaß** gemessen werden:

Bogenmaß

Im Bogenmaß wird ein Winkel α durch die Länge b des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis gemessen:



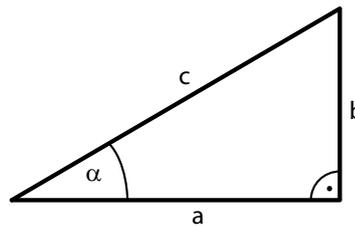
$$\begin{aligned} 360^\circ &\Leftrightarrow \alpha = 2\pi \\ 180^\circ &\Leftrightarrow \alpha = \pi \\ \text{Beispiele: } 90^\circ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ 45^\circ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Der *Einheitskreis** hat Radius 1 und damit einen Gesamtumfang von 2π . Der Winkel 360° entspricht daher im Bogenmaß 2π , 180° entspricht π etc..

Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens eines Winkels werden folgendermaßen mithilfe eines entsprechenden rechtwinkligen Dreiecks definiert:

Definitionen der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ \cot \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \end{aligned}$$



c: Hypotenuse
a: Ankathete
b: Gegenkathete

Nennen wir den dritten, der Seite a gegenüberliegenden Winkel β . Dann ist die Ankathete von α die Gegenkathete von β und umgekehrt und es gilt

$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right). \quad (2.48)$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass aufgrund der Winkelsumme eines Dreiecks $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ist. Wir finden also die

Identitäten

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ \cos \alpha &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ \tan \alpha &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \end{aligned}$$

Weiterhin gelten die Relationen:

Tangens und Kotangens

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} ; \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2.49)$$

Dies folgt aus

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (2.50)$$

sowie einer entsprechenden Rechnung für den Kotangens.

Aus dem Satz des Pythagoras folgt eine häufig benutzte Identität:

Trigonometrischer Pythagoras

Für einen beliebigen Winkel α gilt

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (2.51)$$

Setzen wir $a = c \cos \alpha$ und $b = c \sin \alpha$ in den Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$, so erhalten wir

$$c^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha = c^2.$$

Teilen wir diese Gleichung durch c^2 , so erhalten wir den trigonometrischen Pythagoras.

Um Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen für einige Winkel zu erhalten, betrachten wir bestimmte Dreiecke. In einem gleichseitigen rechtwinkligen Dreieck sind $\alpha = \beta = \pi/4$. Dann haben die Katheten die gleiche Länge, $a = b$, und für die Hypotenuse erhält man aus dem Satz des Pythagoras $c = \sqrt{2}a$. (c ist die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge a .) Dann folgt aus den Definitionen

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1. \quad (2.52)$$

Betrachten wir ein gleichseitiges Dreieck (Seitenlänge c), so definiert die Höhe $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ (Pythagoras) zwei identische rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = \frac{\pi}{6}$ und $\beta = \frac{\pi}{3}$ sowie $a = h$ und $b = \frac{c}{2}$. Wir finden damit

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} ; \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} ; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3} ; \quad \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \quad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Betrachten wir schließlich ein rechtwinkliges Dreieck mit einem spitzen Winkel $\alpha \rightarrow 0$ und somit $\beta \rightarrow \pi/2$, so geht die Ankathete $a \rightarrow c$ und die Gegenkathete $b \rightarrow 0$. Wir erhalten damit

$$\sin 0 = 0 ; \quad \cos 0 = 1 ; \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 ; \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0. \quad (2.53)$$

Insgesamt finden wir also

Zahlenwerte von Sinus und Kosinus für einige Winkel

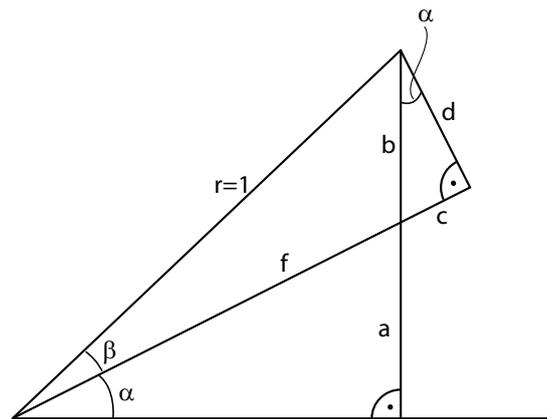


Abbildung 2.5: Konstruktion zum Beweis der trigonometrischen Additionstheoreme

$$\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos 0 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Übung: Skizzieren Sie die beschriebenen Dreiecke und überzeugen Sie sich von den speziellen Zahlenwerten.

Werte für weitere Winkel können aus den *Additionstheoremen*** für Sinus und Kosinus gewonnen werden. Diese Additionstheoreme werden aber auch sonst häufig verwendet und sind die Grundlage für eine Vielzahl wichtiger trigonometrischer Relationen:

Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (2.54)$$

Wir wollen hier einen geometrischen Beweis angeben.⁷ Dieser Beweis ist gleichzeitig eine gute Übung zur Anwendung trigonometrischer Relationen in der Geometrie.

Der Beweis beruht auf der in Abb. 2.5 gezeigten Konstruktion. Wir lesen zunächst ab, dass

$$d = \sin \beta = b \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

⁷In Kapitel 7 über komplexe Zahlen werden wir noch einen rechnerischen Beweis kennenlernen.

und

$$\begin{aligned} a &= f \sin \alpha = (\cos \beta - c) \sin \alpha \\ &= (\cos \beta - b \sin \alpha) \sin \alpha \\ &= (\cos \beta - \sin \beta \tan \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Ausdrücke für die Strecken a und b erhalten wir dann mit

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= a + b = \sin \alpha \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\alpha + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin \alpha \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos \alpha \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

die angegebenen trigonometrischen Additionstheoreme.

Aus den Additionstheoremen folgen die häufig verwendeten Relationen

Trigonometrische Identitäten

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Übung: Zeigen Sie, wie diese Relationen aus den Additionstheoremen folgen.

2.9 Trigonometrische Funktionen

Bisher haben wir Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens nur für Winkel zwischen 0° und 90° definiert. Man kann diese Definition mithilfe des Einheitskreises auf beliebige Winkel ausdehnen. Dies wird in Abb. 2.6 dargestellt. Hierzu betrachtet man zunächst einen Radiusvektor im ersten Quadranten, der einen Winkel α mit der x -Achse bildet und auf die gezeigte Weise ein rechtwinkliges Dreieck definiert. An- und Gegenkathete dieses Dreiecks sind gerade $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ (da die Hypotenuse die Länge 1 hat). $\cos \alpha$ ist also gerade die x -Komponente des Punkts auf dem Einheitskreis, $\sin \alpha$ die y -Komponente. Definieren wir $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ allgemein über diese Komponenten, so können wir dies für beliebige Winkel α tun, auch wenn sie zu Radiusvektoren in anderen Quadranten führen. Da der Radiusvektor bei einer Drehung um 2π unverändert bleibt, hat

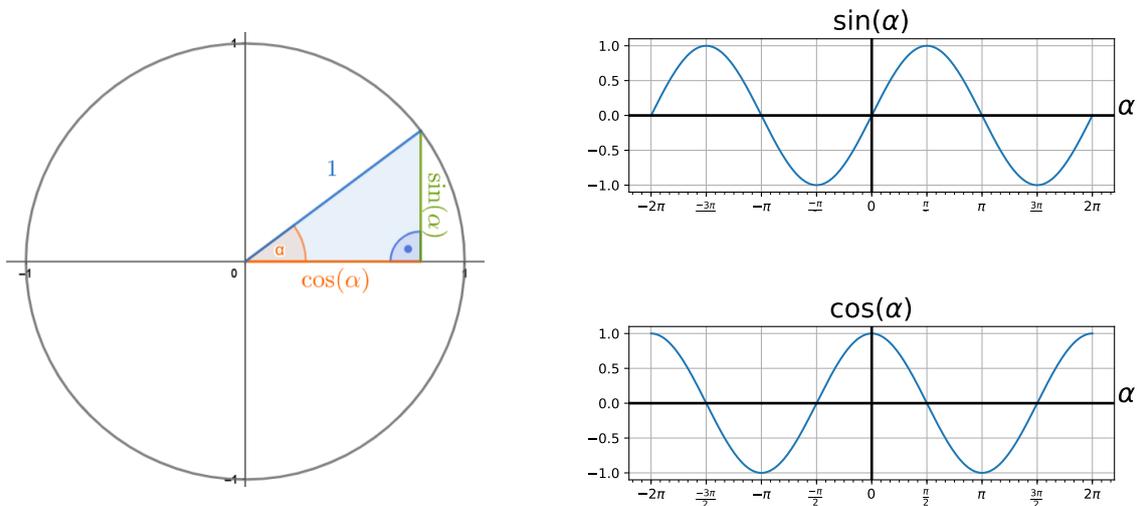


Abbildung 2.6: Definition von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

die resultierende Funktion Periode 2π . Diese Konstruktion führt auf die in Abb. 2.6 dargestellten Funktionsgraphen für die trigonometrischen Funktionen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$.⁸

Durch diese Konstruktion wird deutlich, dass die trigonometrischen Funktionen eng mit der gleichförmigen Kreisbewegung zusammenhängen. Bei der gleichförmigen Kreisbewegung ändert sich der Winkel α linear in der Zeit,

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0. \quad (2.55)$$

Hier haben wir angenommen, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ bei α_0 befindet und sich auf dem Kreis mit der *Winkelgeschwindigkeit** ω bewegt. Die y -Komponente des Teilchenortes ändert sich dann nach

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (2.56)$$

wobei y_0 den Radius des Kreises bezeichnet.

In Video unter diesem [Link](#) wird illustriert, dass die Komponenten der gleichförmigen Kreisbewegung der gleichen mathematischen Gesetzmäßigkeit folgen wie die Schwingung eines Federpendels. Die Auslenkung $y(t)$ eines Federpendels wird also auch durch Glg. (2.56) beschrieben. In diesem Fall bezeichnet man y_0 als Amplitude, ω als Kreisfrequenz und α_0 als Phase der Schwingung. Die Kreisfrequenz hängt über $\omega = 2\pi/T$ mit der Schwingungsperiode T zusammen. Wir veranschaulichen den Einfluss von Amplitude, Frequenz und Phase auf die Funktion $y(t)$ in Abb. 2.7.

Im folgenden werden wir häufiger benutzen, dass der Sinus von kleinen Winkeln folgendermaßen genähert werden kann:

$$\sin \alpha \approx \alpha. \quad (2.57)$$

Hierbei muss der Winkel natürlich im Bogenmaß gemessen werden! Diese Näherungsformel lässt sich leicht geometrisch verstehen. Hierzu betrachten wir den Einheitskreis in Abb. 2.6. Für kleine

⁸Man nennt die trigonometrischen Funktionen daher auch manchmal Kreisfunktionen.

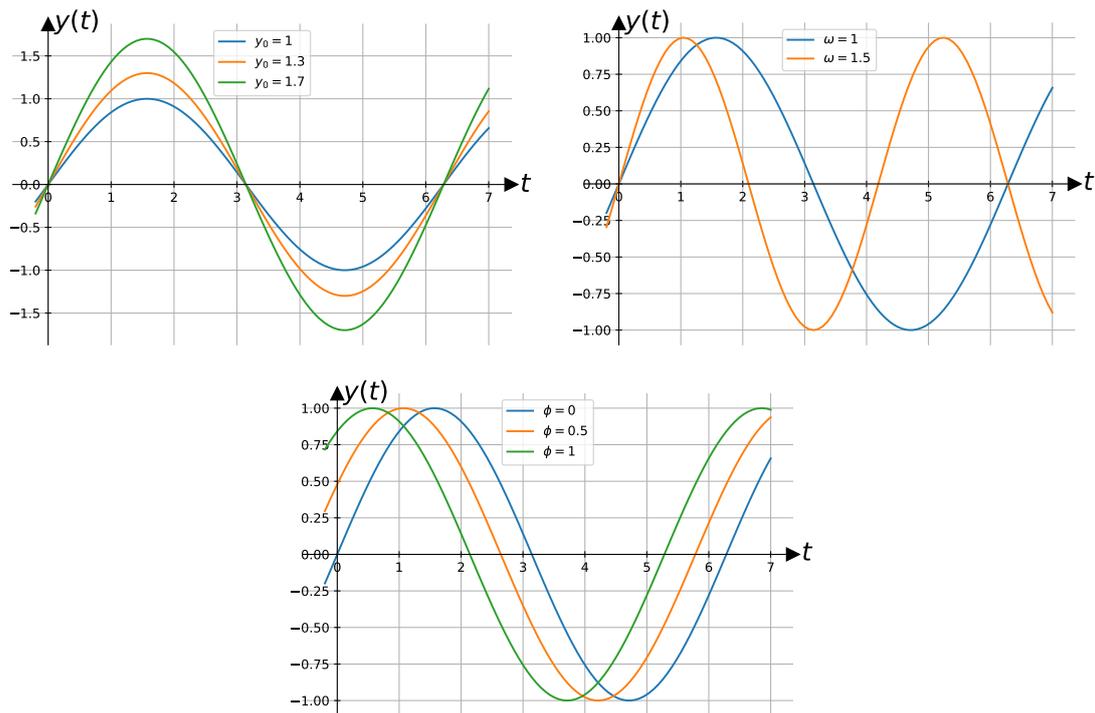


Abbildung 2.7: Abhängigkeit der Schwingung $y(t)$ in Glg. (2.56) von Amplitude (oben links), Frequenz (oben rechts) und Phase (unten). Die Amplitude y_0 ist der maximale Wert, den die Funktion $y(t)$ annimmt, und beschreibt somit die maximale Auslenkung des Pendels. Die Frequenz beschreibt, wie schnell sich die Auslenkung als Funktion der Zeit ändert. Die Phase verschiebt den Funktionsgraphen entlang der x -Achse und charakterisiert die Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt $t = 0$.

Winkel sind die Länge der Gegenkathete, also $\sin \alpha$, und die Länge der Kreisbogens zwischen x -Achse und Radiusvektor, also der Winkel α im Bogenmaß, näherungsweise gleich. Die Näherung wird offenbar immer besser, je kleiner der Winkel. Die Näherung lässt sich auch durch die Funktionsgraphen der linken und rechten Seite von Glg. (2.57) illustrieren. Wie in Abb. 2.8 gezeigt, schmiegen sich diese für kleine α aneinander an. Genauer kann man sehen, dass die Gerade die Tangente an den Sinus im Ursprung ist.

Addiert man zwei trigonometrische Funktionen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen, z.B.

$$f(t) = \sin(t) + \sin(1.1t), \quad (2.58)$$

so findet man die in Abb. 2.9 abgebildete Funktion – eine Schwingung mit langsam veränderlicher Amplitude. Schreiben wir $f(t) = \sin t + \sin(t + \alpha(t))$ mit $\alpha(t) = 0.1t$, so sehen wir, dass die relative Phase $\alpha(t)$ der beiden Schwingungen sich langsam (mit der Differenzfrequenz, hier $\Delta\omega = 0.1$) als Funktion der Zeit ändert. Dies führt abwechselnd zu konstruktiver und destruktiver Überlagerung der beiden Schwingungen. Dieses als Schwebung bezeichnete Phänomen wird beim Stimmen von Musikinstrumenten benutzt. Sind zwei Instrumente (oder Instrument und Stimmgabel) leicht gegeneinander verstimmt, so hört man eine periodische Änderung der Lautstärke.

Übung: Benutzen sie das Additionstheorem für den Sinus, um die Funktion $f(t)$ so umzuschreiben, dass die Schwebung evident wird.

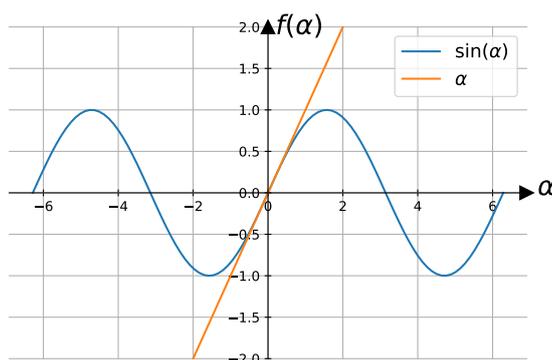


Abbildung 2.8: Illustration der Näherung des Sinus für kleine Winkel. Bei kleinen Winkel schmiegt sich die Gerade $f(\alpha) = \alpha$ an den Graphen des Sinus an, so dass sie für kleine α eine gute Näherung des Sinus darstellt. Genauer ist die Gerade die Tangente an den Graphen des Sinus im Punkt $\alpha = 0$.

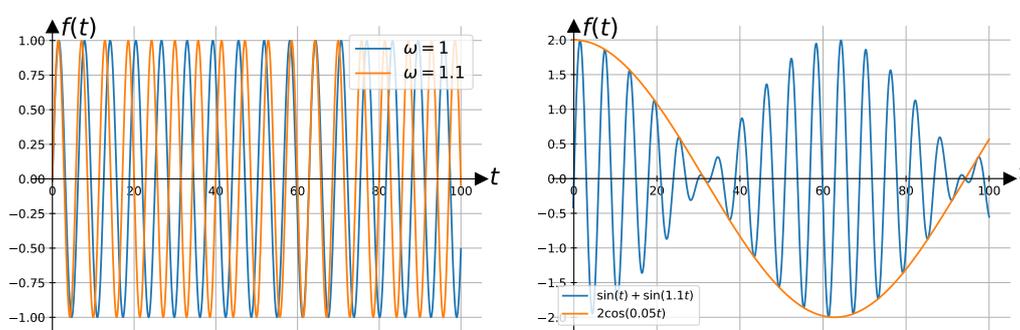


Abbildung 2.9: Illustration einer Schwebung. Die beiden überlagerten Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen (links). Die relative Phase der beiden Schwingungen ändert sich langsam, so dass sich destruktive und konstruktive Überlagerung mit der Differenzfrequenz (hier $\Delta\omega = 0.1$) abwechseln. Das führt zu Schwingungen (blau) mit langsam veränderlicher Amplitude, wie durch die Einhüllende (rot) dargestellt (rechts).

Eine interessante und vielfach benutzte Tatsache ist, dass jede periodische Funktion exakt als (unendliche) Summe trigonometrischer Funktionen dargestellt werden kann. Hat die periodische Funktion die Periode T und somit eine Kreisfrequenz $2\pi/T$, so enthält diese Summe trigonometrische Funktionen mit den ganzzahligen Vielfachen dieser Frequenz:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t / T) + b_n \sin(2\pi n t / T)] \quad (2.59)$$

Man bezeichnet diese Darstellung als *Fourier-Reihe*** und die a_n und b_n als *Fourier-Koeffizienten***.⁹ Weiterhin bezeichnet man $\omega = 2\pi/T$ als Grundfrequenz und die Vielfachen als höhere Harmonische.¹⁰ Die Fourier-Reihe wird in Abb. 2.10 am Beispiel eines Rechtecktons illustriert. Der Rechteckton wird schon dann gut approximiert, wenn die Fourier-Reihe nach wenigen Termen (wenigen Obertönen) abgebrochen wird.

⁹Die Fourier-Koeffizienten kann man allgemein als Integrale über die periodische Funktion $f(t)$ angeben.

¹⁰In der Musik spricht man auch von Grundton und Obertönen. Eine Oktave entspricht gerade der Verdopplung der Frequenz.

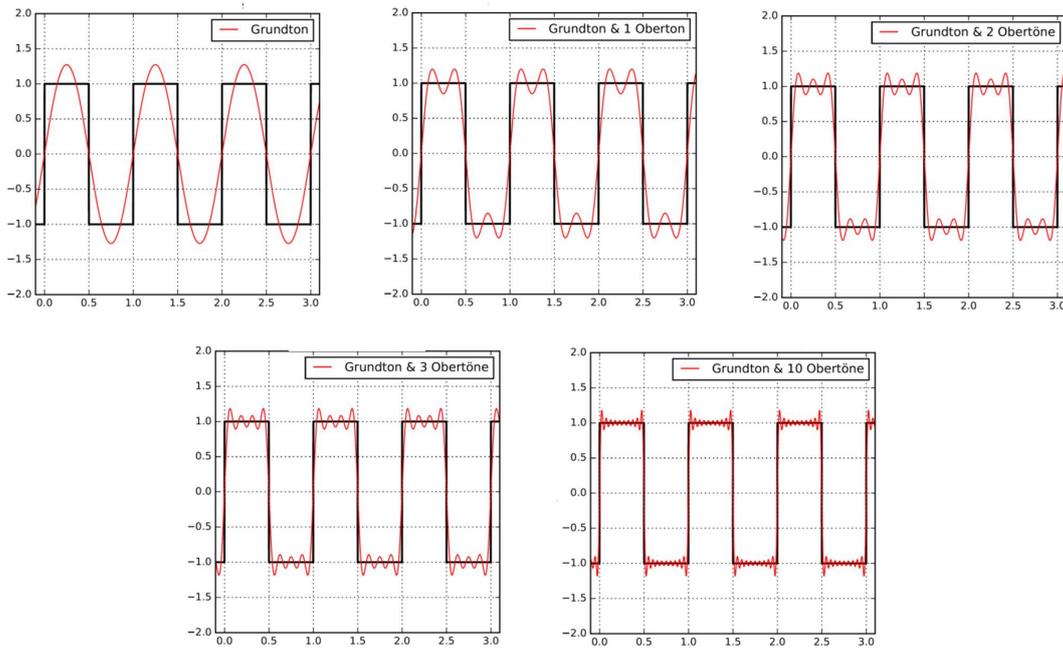


Abbildung 2.10: Illustration der Fourierreihe am Beispiel eines Rechtecktons (schwarz). Die roten Linien sind Näherungen durch Fourier-Reihen, die nach einer endlichen Anzahl von Frequenzen (in der Musik: Obertöne) abgebrochen werden.

2.10 Exponentialfunktion

Nicht erst seit der Covid-19 Pandemie ist die Exponentialfunktion wichtig. Man wird auch durch einfache ökonomische Fragen automatisch auf die Exponentialfunktion geführt.

Zunächst führen wir die *Eulersche Zahl** e ein. Die Zahl e ist in der Mathematik ähnlich wichtig wie π und kann mithilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818\dots \quad (\text{hier für } n = 10^8)$$

definiert werden. Natürlich brauchen wir keine Folge mit diskreten $n \in \mathbb{N}$ betrachten, sondern können auch den Grenzwert einer Funktion mit $x \in \mathbb{R}$ betrachten,

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \quad (2.60)$$

Benutzt man eine dieser Definitionen, so muss man für n bzw. x recht hohe Werte einsetzen, um einen genauen Wert für e zu bekommen. (Probieren Sie es aus!)

Alternativer Ausdruck für die Eulersche Zahl*.

Wir können noch auf anderem Wege einen näherungsweise Zahlenwert für e angeben. Hierzu

gehen wir folgendermaßen vor. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!0!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Die Terme werden aufgrund des Vorfaktors $\frac{1}{j!}$ mit zunehmendem j kleiner. Wir können also eine gute Näherung erhalten, indem wir die Summe bei einem festen $j_0 < n$ abbrechen und dann den Limes $n \rightarrow \infty$ nehmen. Es stellt sich heraus, dass wir anschließend im Limes $j_0 \rightarrow \infty$ ein exaktes Resultat für e erhalten,^a

$$\approx 1 + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{j!} \quad \Rightarrow \quad e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad , \quad (2.61)$$

so dass

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \approx 2,716$$

Wir sehen, dass schon wenige Terme einen recht genauen Zahlenwert für e liefern.

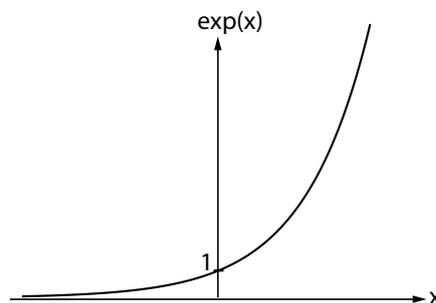
^aWir gehen hier großzügig mit den beiden Grenzprozessen $n \rightarrow \infty$ und $j_0 \rightarrow \infty$ um, die ja eigentlich gekoppelt sind. Dass solche doppelten Grenzübergänge problematisch sein können, hat der Anekdote nach T. Kaluza in seinen Vorlesungen an folgendem Beispiel klargemacht: Der Arzt untersucht einen Mann mit Magenbeschwerden und empfiehlt, dass er öfter essen solle, aber dafür weniger! Der Mann wollte es besonders gut machen und aß anschließend immer nichts!

Die Exponentialfunktion

Die Funktion

$$f(x) = e^x$$

heißt *Exponentialfunktion*^{*}, mit dem Funktionsgraphen



Die Exponentialfunktion tritt zum Beispiel als Lösung des Zinseszins-Problems auf.¹¹ Sie legen ein Anfangskapital a_0 bei der Bank Ihres Vertrauens zu einem Zinssatz von $p\%$ an. Vielfach werden die Zinsen erst nach Ablauf eines Jahres gezahlt. In diesem Fall erhöht sich Ihr Kapital nach dem ersten Jahr auf

$$a_1 = a_0(1+k) \quad \text{wobei } k = \frac{p}{100}. \quad (2.62)$$

Für das nächste Jahr werden nun die gesamten a_1 verzinst, so dass Ihre Reichtümer nach zwei Jahren auf

$$a_2 = a_1(1+k) = a_0(1+k)^2 \quad (2.63)$$

angewachsen sind. Nach m Jahren haben Sie

$$a_m = a_0(1+k)^m. \quad (2.64)$$

Nun gibt es aber auch Banken, die Ihnen ein zwölftel dieses Zinses am Ende eines jeden Monats gutschreiben. Allgemeiner können wir die Akkumulation Ihres Kapitals für den Fall berechnen, dass die Bank n -mal im Jahr $\frac{p}{n}\%$ Zinsen zahlt. In diesem Fall haben Sie nm Zinszahlungen von $\frac{p}{n}\%$, so dass Sie nach m Jahren ein Kapital von

$$a_m = a_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nm} \quad (2.65)$$

Ihr Eigen nennen können.

Nun betrachten wir schließlich den Grenzfall $n \rightarrow \infty$, in dem der Zins kontinuierlich ausgezahlt und dann gleich selbst verzinst wird. Nach m Jahren haben Sie ein Kapital von

$$\begin{aligned} a_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{nm} \\ &= a_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}} \right]^{mk} \\ &= a_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{mk}. \end{aligned}$$

Mit der Definition von e in Glg. (2.60) erhalten wir

$$a_m = a_0 e^{km}, \quad (2.66)$$

d.h. das Anwachsen Ihres Kapitals wird durch die Exponentialfunktion beschrieben.

In Abb. 2.11 wird die Rolle der Parameter a und b in der Exponentialfunktion

$$f(x) = ae^{bx} \quad (2.67)$$

graphisch illustriert. a gibt den y -Achsenabschnitt an, $b > 0$ entspricht einer ansteigenden und $b < 0$ einer abfallenden Exponentialfunktion.

¹¹Wir gehen hier von der optimistischen Annahme aus, dass Sie eine Bank gefunden haben, die tatsächlich noch Zinsen zahlt.

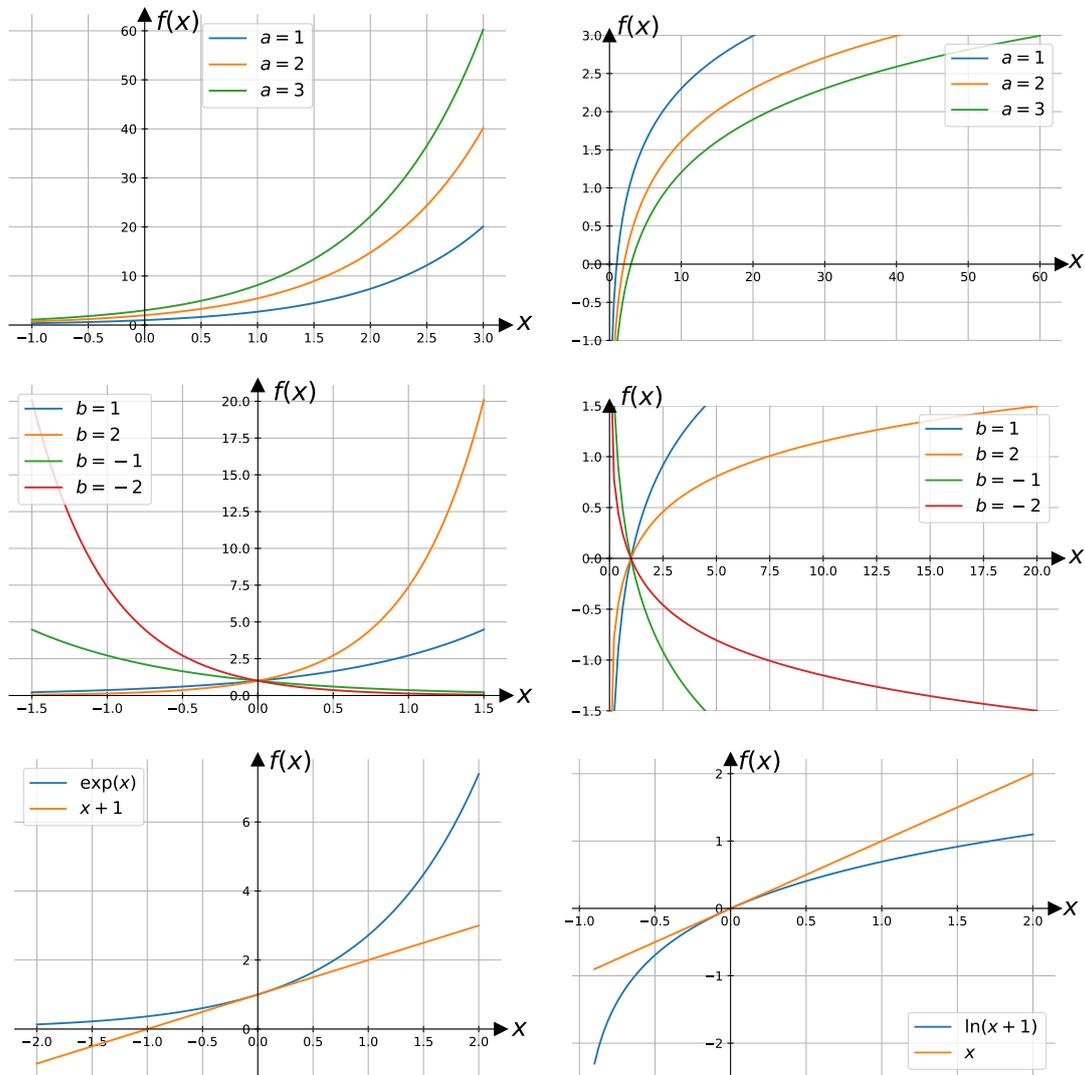


Abbildung 2.11: Funktionsgraph der Exponentialfunktion $f(x) = ae^x$ für verschiedene Werte des Vorfaktors a (oben links); Exponentialfunktion $f(x) = e^{bx}$ für verschiedene Werte des Faktors b (Mitte links); Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x - \ln a$ für verschiedene Werte von a (oben rechts); Funktionsgraph der Logarithmusfunktion $f(x) = \frac{1}{b} \ln x$ für verschiedene Werte von b (Mitte rechts). Die Funktionsgraphen der Logarithmusfunktionen auf der rechten Seite gehen aus denen der Exponentialfunktionen auf der linken Seite durch Spiegelung an der Geraden $f(x) = x$ hervor (Austausch der x - und y -Achse). Funktionen, die auf diese Weise auseinander hervorgehen, nennt man Umkehrfunktionen. Näherungen (rot) für kleine x an die Exponentialfunktion (unten links) und die Logarithmusfunktion (unten rechts), s. Gl. (2.71) und (2.70).

Übung: Wie verhalten sich die Graphen von $f(x) = a^x$ für verschiedene a ? (Führen Sie diese Funktion auf eine Exponentialfunktion zur Basis e zurück.)

2.11 Natürlicher Logarithmus

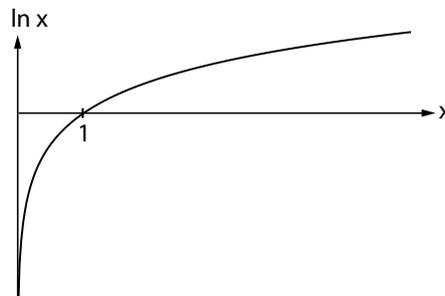
Ebenso wie Exponentialfunktion führt man auch den Logarithmus zur Basis e ein:

Natürlicher Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e heißt *natürlicher Logarithmus*^{*} und wird mit \ln bezeichnet.

$$\ln x = \log_e x$$

Der zugehörige Funktionsgraph



entspricht der Spiegelung des Funktionsgraphen der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ an der Diagonalen $f(x) = x$. Denn ist $x = e^y$, so gilt $y = \ln x$, d.h. die Graphen der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus gehen auseinander durch Vertauschen der x - und y -Achsen hervor.

Funktionspaare wie $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln x$ werden als *Umkehrfunktionen*^{*} bezeichnet.¹²

Auf dieselbe Weise können wir die Funktionsgraphen von

$$f(x) = \ln x - \ln a = \ln \frac{x}{a} \quad (2.68)$$

(Umkehrfunktion von $f(x) = ae^x$) sowie

$$f(x) = \frac{1}{b} \ln x = \ln x^{\frac{1}{b}} \quad (2.69)$$

(Umkehrfunktion von $f(x) = e^{bx}$) aus den entsprechenden Graphen der Exponentialfunktion gewinnen, s. Abb. (2.11).

Übung: Wie verhalten sich die Graphen von $f(x) = \log_a x$ für verschiedene a ?

¹²Umkehrfunktionen werden in Kap. 3.6 genauer diskutiert.

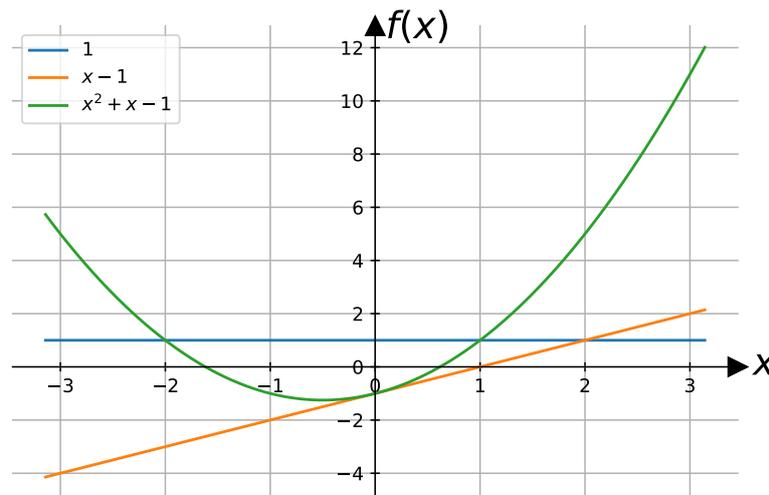


Abbildung 2.12: Graphische Darstellung ausgewählter Polynome. Blau: Polynom nullten Grades. Orange: Polynom ersten Grades. Grün: Polynom zweiten Grades.

Wir werden später den folgenden Grenzwert benötigen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ y \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right) \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgen zwei wichtige Relationen, die wir später als Spezialfälle der allgemeinen *Taylor-Reihe*** identifizieren werden:

- Für kleine x gilt:

$$\ln(1+x) \approx x. \quad (2.70)$$

- Durch Exponenzieren der letzten Relation folgt ebenso

$$e^x \approx 1+x, \quad (2.71)$$

für kleine x .

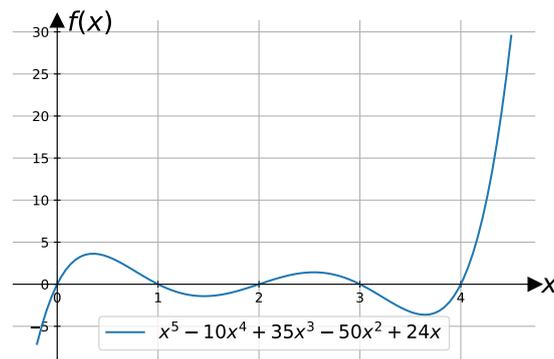
Die Näherungsformeln für $\ln(1+x)$ sowie e^x für kleine x entsprechen graphisch der Näherung der Funktion durch die Tangente bei $x=0$, s. Abb. 2.11 und vgl. die entsprechende Näherungsformel (2.57) für den Sinus.

Übung: Nehmen Sie an, Sie legen Ihr Geld a_0 auf einem Konto an, dessen Zinssatz proportional zur abgelaufenen Zeit wächst, beginnend mit Null und pro Jahr um Δp anwachsend. Die Zinsen werden in n Tranchen pro Jahr ausgezahlt. Zeigen Sie, dass Ihr Geld im Grenzfall einer kontinuierlichen Akkumulation der Zinsen (d.h. $n \rightarrow \infty$) nach m Jahren auf $a_0 \exp(\Delta k m^2 / 2)$ angewachsen ist ($\Delta k = \Delta p / 100$).

2.12 Polynomdivision

Eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.72)$$

Abbildung 2.13: Polynom fünften Grades mit Nullstellen bei $x=0,1,2,3,4$.

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als *Polynom n -ten Grades*. Polynome nullten Grades sind Konstanten – $p(x) = a_0$, – Polynome ersten Grades sind Geraden – $p(x) = a_1x + a_0$ – und Polynome zweiten Grades Parabeln – $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, s. Abb. (2.12).

Eine zentrale Eigenschaft von Polynomen wird durch den sogenannten *Fundamentalsatz der Algebra*** formuliert. Dieser behandelt die Nullstellen (Schnittpunkte x_n mit der x -Achse) von Polynomen und besagt:¹³

Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten hat maximal n Nullstellen x_n , bei denen $p(x_n) = 0$.

Wir haben bereits in unserer Diskussion der quadratischen Gleichung gesehen und in Abb. 2.4 illustriert, dass Parabeln (Polynome zweiten Grades) maximal zwei Nullstellen haben. Der Fundamentalsatz der Algebra ist also eine Verallgemeinerung dieser bekannten Aussage. Diese allgemeinere Aussage kann hier leider nicht bewiesen, sondern nur am Beispiel eines Polynom höheren Grades illustriert werden, s. Abb. 2.13.

Während die Nullstellen für Polynome zweiten Grades mittels quadratischer Gleichung gefunden werden können, gibt es für Polynome höheren Grades keine vergleichbar einfachen Methoden. Hat man allerdings eine Nullstelle x_1 eines Polynoms $p_n(x)$ n -ten Grades gefunden, so gilt

$$p_n(x) = (x - x_1)p_{n-1}(x), \quad (2.73)$$

wobei $p_{n-1}(x)$ ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades ist. Das Polynom $p_{n-1}(x)$ kann, wie wir gleich illustrieren werden, mithilfe der *Polynomdivision* berechnet werden. Kennt man also eine Nullstelle eines Polynoms dritten Grades (beispielsweise durch Raten), so kann man die Bestimmung der restlichen Nullstellen auf eine quadratische Gleichung reduzieren.

Wir wollen nun die Polynomdivision am Beispiel des Polynoms

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \quad (2.74)$$

illustrieren. Man überzeugt sich leicht davon, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist.¹⁴ Wir wollen also das Polynom $p(x)$ durch den Faktor $(x - 1)$ teilen. Dies gelingt mithilfe der Polynomdivision ganz ähnlich zur schriftlichen Division:

¹³Eigentlich behandelt der Fundamentalsatz der Algebra Polynome $p(z)$ mit komplexen Koeffizienten und komplexer Variable z . Dann gilt sogar, dass ein Polynom n -ten Grades immer genau n Nullstellen hat. Allerdings sind diese Nullstellen nicht notwendigerweise auf der reellen Achse. Daher ist die Anzahl der Nullstellen reeller Polynome maximal gleich n .

¹⁴Ganzzahlige Nullstellen eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten müssen Teiler des konstanten Terms (hier also von 6) sein.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{x^2 - x} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{6x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

Multipliziert man $x - 1$ mit dem ersten Term x^2 auf der rechten Seite, so reproduziert man den x^3 Term des Polynoms. Man zieht nun $x^2(x - 1) = x^3 - x^2$ vom ursprünglichen Polynom ab und verfährt mit dem resultierenden Polynom $-x^2 - 5x$ analog. Da $(x - 1)$ tatsächlich ein Faktor des ursprünglichen Polynoms ist, geht diese Polynomdivision genau auf.

Polynomdivision kann aber auch nützlich sein, wenn sie nicht aufgeht. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn man *gebrochenrationale** Funktionen analysieren möchte. Gebrochenrationale Funktionen haben in Zähler und Nenner jeweils ein Polynom. Ist der Grad n des Polynoms im Zähler größer als der Grade m des Polynoms im Nenner, so verhält sich die gebrochenrationale Funktion asymptotisch bei großen $|x|$ wie ein Polynom des Grades $n - m$.

Wir illustrieren dies am Beispiel der Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1}. \quad (2.75)$$

In diesem Fall geht die Polynomdivision nicht auf:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1} \\
 \underline{-x^3 + x^2} \\
 \phantom{(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1}} x^2 \\
 \phantom{(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1}} \underline{-x^2 + x} \\
 \phantom{(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1}} x - 5 \\
 \phantom{(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1}} \underline{-x + 1} \\
 \phantom{(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 + \frac{-4}{x - 1}} -4
 \end{array}$$

sondern wir finden, dass

$$f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{4}{x - 1}. \quad (2.76)$$

Die gebrochenrationale Funktion kann also als die Summe eines Polynoms (Grad $n - m = 1$) und eines Restterms geschrieben werden. Der Restterm wird für große $|x|$ klein, so dass sich die gebrochenrationale Funktion asymptotisch für große $|x|$ wie das Polynom verhält. Dies ist in Abb. 2.14 illustriert.

Wir können die Polynomdivision auch fortsetzen und auf der rechten Seite negative Potenzen von x zulassen. Dann wäre der nächste Term auf der rechten Seite $-1/x$ und der Rest wird zu

$$-4 - (x - 1) \frac{-4}{x} = \frac{-4}{x}. \quad (2.77)$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x(x - 1)}. \quad (2.78)$$

Der neue Restterm fällt bei großen $|x|$ sogar wie $1/|x|^2$ ab und wir erhalten eine weiter verbesserte Näherung für große $|x|$. Auch dies ist in Abb. 2.14 illustriert. Offenbar kann dieses Verfahren mit den Termen der Ordnung $1/x^2$, $1/x^3$ usw. fortgesetzt werden, sofern man noch genauere Näherungen für große $|x|$ wünscht.

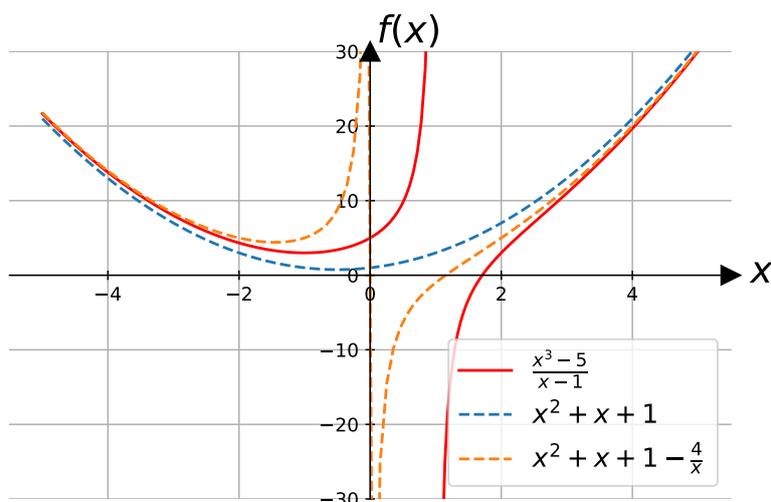


Abbildung 2.14: Beispiel einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$ und verschiedene mittels Polynomdivision gewonnene Näherungen für große $|x|$. Man beachte auch, dass die Näherungsformeln in den Nähe der Polstellen der Funktion $f(x)$ (und gegebenenfalls ihrer eigenen Polstellen) keine gute Näherung darstellen.

2.13 Funktionen

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen allgemeinen Bemerkungen zu Funktionen. Wir haben mit Polynomen, den gebrochenrationalen Funktionen, der Exponentialfunktion, dem natürlichen Logarithmus oder den trigonometrischen Funktionen bereits verschiedene Funktionen angesprochen.

Funktionen sind Abbildungen, die jedem Element x einer Definitionsmenge D (auch Definitionsbereich) genau ein Element $y = f(x)$ einer Wertemenge W (auch Wertebereich) zuordnet. So können wir die Exponentialfunktion als Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen definieren,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto e^x. \quad (2.79)$$

Der natürliche Logarithmus ist nur auf den positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_> = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ definiert,

$$f: \mathbb{R}_> \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln x. \quad (2.80)$$

Gebrochenrationale Funktionen sind auf der gesamten reellen Achse definiert mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners, z.B.

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x+1}{x-1}. \quad (2.81)$$

Funktionen können auch mit eingeschränkter Definitionsmenge definiert werden, obwohl die Funktion außerhalb dieser Definitionsmenge wohldefiniert ist. So könnten wir die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}; x \mapsto x^2 \quad (2.82)$$

definieren, bei der x nur Werte in den nichtnegativen reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\geq} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ annimmt, obwohl x^2 auch für negative x existiert. Wir haben hier weiterhin die Wertemenge auf \mathbb{R}_{\geq} eingeschränkt.

Umgekehrt können einem Element der Wertemenge kein, ein oder viele Elemente der Definitionsmenge zugeordnet sein. So gilt für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 \quad (2.83)$$

dass jedem positiven Element y der Wertemenge \mathbb{R} zwei x -Werte entsprechen, nämlich $x = \pm\sqrt{y}$, dem Wert $y = 0$ nur ein x -Wert entspricht, nämlich $x = 0$, und allen negativen Elementen $y < 0$ der Wertemenge gar kein x -Wert.

Entspricht allerdings auch jedem Element der Wertemenge genau ein Element der Definitionsmenge, so heißt die Funktion bijektiv. Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition für Abbildungen, s. Kap. 2.3. Beispiele bijektiver Funktionen sind der Logarithmus in Glg. (2.80) oder die Quadratfunktion in Glg. (2.82). Im Gegensatz dazu ist die Quadratfunktion in Glg. (2.83) nicht bijektiv. Die Eigenschaften einer Funktion werden also wesentlich durch die Definitions- und Wertemengen mitbestimmt.

Man definiert weiterhin surjektive und injektive Funktionen. Surjektive Funktionen nehmen jedes Element der Wertemenge mindestens einmal an, injektive Funktionen lassen eindeutig vom Funktionswert auf den x -Wert zurückschließen, nehmen aber nicht notwendigerweise jedes $y \in W$ an. Bijektive Funktionen sind also Funktionen, die sowohl injektiv als auch surjektiv sind. Die Exponentialfunktion in Glg. (2.79) ist injektiv, aber nicht surjektiv. Wir könnten aber die Exponentialfunktion als

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>} ; x \mapsto e^x. \quad (2.84)$$

definieren, wobei wir die Wertemenge auf die positiven reellen Zahlen einschränken. Dann ist sie nicht nur injektiv, sondern auch surjektiv und damit sogar bijektiv. Weiterhin ist die durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq} ; x \mapsto x^2 \quad (2.85)$$

definierte Quadratfunktion surjektiv, aber nicht injektiv.

Übung: Untersuchen Sie die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x^3 \quad (2.86)$$

und

$$f: \mathbb{R}_{\geq} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq} ; x \mapsto e^{x^2} \quad (2.87)$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Schränkt man Definitions- oder Wertemenge auf ein Intervall ein, so unterscheidet man abgeschlossene und offene Intervalle. Abgeschlossene Intervalle werden durch eckige Klammern notiert,

$$[x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 \leq x \leq x_2\}. \quad (2.88)$$

Hier sind die Intervallgrenzen x_1 und x_2 im Intervall inbegriffen. Bei offenen Intervallen

$$(x_1, x_2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\} \quad (2.89)$$

gehören die Intervallgrenzen nicht zum Intervall. Natürlich können auch Intervalle betrachtet werden, die halboffen sind, z.B.

$$(x_1, x_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x \leq x_2\}. \quad (2.90)$$

Als alternative Schreibweise für offene Intervalle wird auch $]x_1, x_2[$ verwendet.

Übung: Geben Sie für die Funktion $f(x) = \sin x$ mit Wertebereich $W = [-1, 1]$ einen Definitionsbereich derart an, dass die Funktion bijektiv ist.

2.14 Aufgaben

Aufgabe 2.1 Geometrie

- Drücken Sie die Länge der Diagonale eines Quadrats sowie der Raumdiagonale eines Würfels durch die Seitenlänge a aus.
- Drücken Sie die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks durch die Seitenlänge a aus.
- Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte (x, y) , deren Koordinaten die implizite Gleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (2.91)$$

erfüllen, einen Kreis mit Mittelpunkt bei (x_0, y_0) und Radius R bilden.

- Geben Sie eine implizite Gleichung für die Menge der Punkte (x, y, z) auf einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt bei (x_0, y_0, z_0) an.
- Geben Sie eine Formel für den Oberflächeninhalt einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und Höhe h an.
- Geben Sie den Radius der Umkugel einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge a) und Höhe h an. Die Umkugel berührt die Pyramide in allen fünf Eckpunkten.
- Geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt eines gleichseitigen Sechsecks mit Seitenlänge a an.
- Graphen ist eine einzelne Graphitschicht, in der die Kohlenstoffatome in einem Honigwabengitter mit C-C Bindungslänge $a = 142\text{pm}$ angeordnet sind. Berechnen Sie den Abstand zwischen den Mittelpunkten benachbarter Honigwablen.

Aufgabe 2.2 Bruchrechnung

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten x auf:

- $\frac{11}{5} - \frac{x-20}{2x} = \frac{2x-1}{3x}$
- $\frac{3x+14}{2x-4} = \frac{3x+2}{2x-7}$
- $\frac{3x-3}{x-8} + 4 = \frac{2x+2}{x-8} + \frac{3x+3}{2x-16}$
- $\frac{35}{9x^2-16} + \frac{3}{3x+4} = \frac{14}{3x-4}$
- $\frac{2(x-c)}{a^2+ab-ac-bc} - \frac{x+c}{a^2+ab+ac+bc} = \frac{1}{a+b}$
- Läufer A benötigt für eine 25 km lange Strecke 30 Minuten mehr, als Läufer B für 15 km braucht. Die Geschwindigkeit von A ist um 2.5 km/h größer als die von B. Berechne die Laufzeit von A.

Aufgabe 2.3 Irrationale Zahlen

Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 2.4 Wurzelgleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Unbekannten x auf:

- $\sqrt{3x-2} = \sqrt{2x+7}$

- $\sqrt{x-15} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$
- $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x^2+9} = 0$
- $\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}} = x+1$

Aufgabe 2.5 Vollständige Induktion

Beweisen Sie, dass

- die Formel

$$\sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

für die *geometrische Reihe* gilt. Unter welcher Bedingung können Sie den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ bilden und was ist das Resultat?

- der Ausdruck

$$3^{2n+4} - 2^{n-1}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

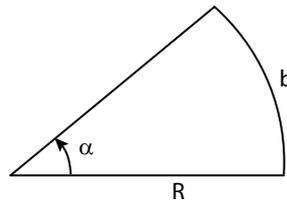
- die Gleichung

$$\prod_{j=1}^n \frac{j+2}{j} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Das Zeichen $\prod_{j=1}^n$ steht hier für das Produkt der Terme von $j = 1$ bis $j = n$.

Aufgabe 2.6 Kreissegment

Drücken Sie die Bogenlänge b des Kreissegments (s. Skizze) durch den Winkel α und den Radius R aus.



Aufgabe 2.7 Quadratische Gleichung

Leiten Sie die abc-Formel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

mittels quadratischer Ergänzung her.

Aufgabe 2.8 Trigonometrische Identitäten

Beweisen Sie, ausgehend von der in der Vorlesung bewiesenen Relation $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\bullet \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)}$$

$$\bullet \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

• Drücken Sie $\sin 3\alpha$ durch $\sin \alpha$ aus.

• Drücken Sie $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan \alpha$ und $\tan \beta$ aus.

• Vereinfachen Sie

$$\frac{\cos \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha (\cot \alpha - 1)}.$$

Aufgabe 2.9 Hyperbelfunktionen

Die sogenannten Hyperbelfunktionen werden definiert durch

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (2.92)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (2.93)$$

Man bezeichnet diese Funktionen als *Sinus Hyperbolicus* etc.

• Drücken Sie $\sinh(x + y)$ aus durch $\sinh x$, $\cosh x$, $\sinh y$ and $\cosh y$.

• Analog für $\cosh(x + y)$.

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den entsprechenden Formeln für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 2.10 Parabelförmiger Brückenbogen

Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel mit Lagern bei $x = \pm 5\text{m}$ und Scheitelhöhe 4m. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Aufgabe 2.11 Polynomdivision

Bestimmen Sie durch Polynomdivision das Verhalten von

$$\bullet f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2}$$

für große Werte von x . Vernachlässigen Sie Terme des Typs $1/x^n$ mit $n > 2$.

3. Differentialrechnung

Geometrisch liegt der Differentialrechnung die Frage zugrunde, wie groß die Steigung einer Funktion in einem Punkt ist. Dieses Problem wird durch die Definition der Ableitung von Funktionen gelöst. Die Ableitung erlaubt es, im Rahmen der Kurvendiskussion einen guten Überblick über das Verhalten von Funktionen zu erhalten. Die Berechnung von Ableitungen elementarer Funktionen erfolgt schematisch im Rahmen einer Reihe von Regeln.

Die Ableitung wird in der Physik natürlich nicht nur als mathematisches Werkzeug verwendet, sondern liegt auch der Definition verschiedener physikalischer Größen zugrunde. Dies gilt insbesondere für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a . Die Geschwindigkeit gibt die Änderungsrate des Ortes mit der Zeit an und ist demnach die Ableitung des Ortes $x(t)$ nach der Zeit. Die Beschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit und damit die erste Ableitung der Geschwindigkeit (sowie die zweite Ableitung des Ortes) nach der Zeit.

3.1 Ableitung

Als *Ableitung*^{*} bezeichnen wir die Steigung einer Funktion in einem Punkt. Die Ableitung gibt demnach die Rate an, mit der sich der Funktionswert mit x ändert. Wir beginnen mit den einfachsten Funktionen, den *Geraden*^{*}. Die Steigung beliebiger Funktionen kann dann auf die Steigung von Geraden zurückgeführt werden.

Die Funktionsgleichung einer Gerade hat die Form

$$f(x) = mx + b \tag{3.1}$$

mit den Konstanten m und b . Die *Steigung*^{*} der Geraden wird durch m angegeben, der *Achsenabschnitt*^{*} durch b . Die Steigung der Geraden kann mithilfe des in Abb. 3.1 gezeigten *Steigungsdreieck*^{*} als Verhältnis von Δy zu Δx definiert werden:

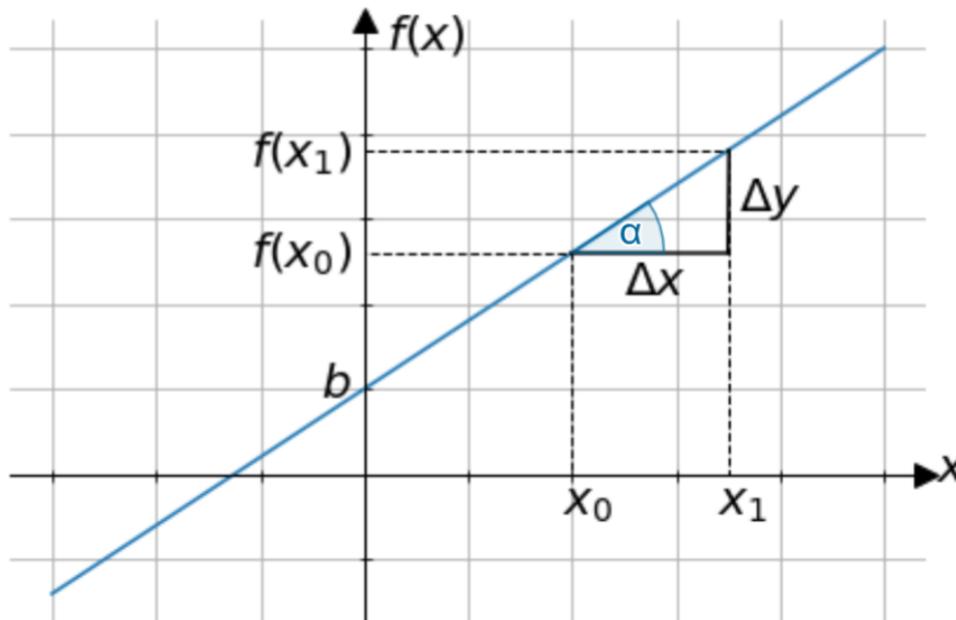


Abbildung 3.1: Gerade mit Steigungsdreieck. Die Steigung der Geraden ist definiert durch $m = \Delta y / \Delta x$ und ist unabhängig von der Wahl des Steigungsdreiecks. Ein alternatives Maß für die Steigung ist der Winkel α , für den $m = \tan \alpha$ gilt.

Steigung von Geraden

Die Steigung m einer Geraden wird über

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \tan \alpha \quad (3.2)$$

definiert. Hier bezeichnet α den Winkel, den die Gerade mit der x -Achse einschließt wie in Abb. 3.1 gezeigt. Je nach Vorzeichen der Steigung m steigt die Gerade an ($m > 0$), ist eine Konstante ($m = 0$) oder fällt ab ($m < 0$), s. Abb. 3.2.

Die Steigung einer beliebigen Funktion an einem Punkt x kann nun mithilfe der *Tangente** an die Kurve in diesem Punkt definiert werden. Die Steigung der Tangente ist offenbar ein Maß für die Steigung der Funktion, s. Abb. 3.3 und wird als Ableitung der Funktion an diesem Punkt bezeichnet. Um die Steigung der Tangente und damit die Ableitung im Punkt x zu berechnen, betrachten wir eine Schar von *Sekanten**, also Geraden, die die Funktion in zwei Punkten schneiden. Einer dieser Punkte ist der Punkt x . Je näher nun der zweite Punkt x' an den Punkt x heranrückt, desto besser wird die Steigung der Tangente durch die Steigung der Sekante genähert. Im Grenzfall $x' \rightarrow x$ geht

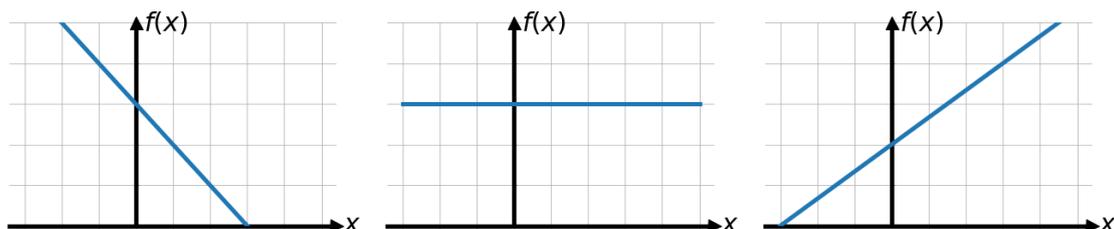


Abbildung 3.2: Geraden mit Steigung $m < 0$ (links), $m = 0$ (Mitte), $m > 0$ (rechts).

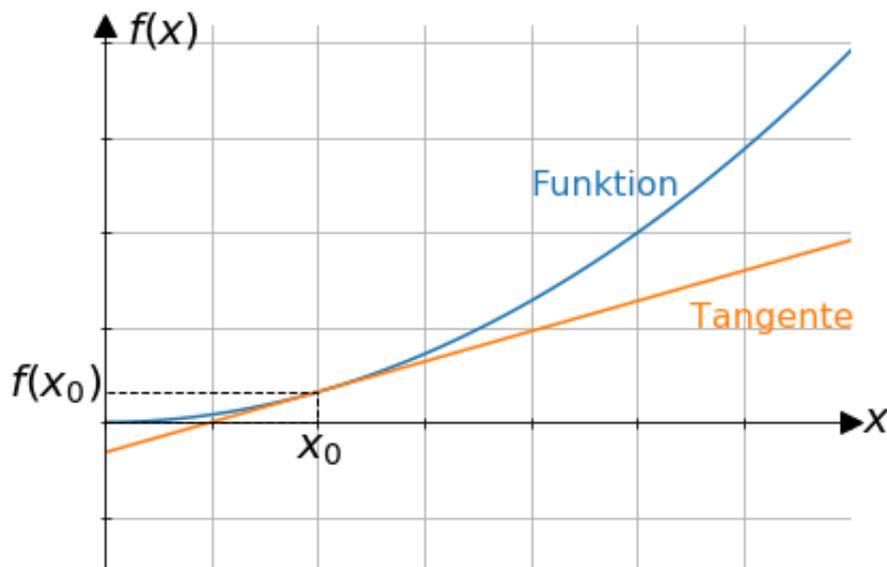


Abbildung 3.3: Tangente an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 . Die Tangente berührt die Funktion im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Ihre Steigung ist ein Maß für die Steigung der Funktion $f(x)$ und wird als Ableitung der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 bezeichnet.

die Steigung der Sekante in die Steigung der Tangente über. Dieser Grenzprozess wird in Abb. 3.4 illustriert.

Die Steigung einer Sekante, die die Funktion $f(x)$ in den Punkten x und x' schneidet, wird durch den *Differenzenquotienten* *

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \quad (3.3)$$

gegeben. Damit ergibt sich die

Definition der Ableitung

Die Steigung der Tangente definiert die (erste) Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ im Punkt x ,

$$f'(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.4)$$

Den zweiten Ausdruck ergibt sich, indem man $x' = x + \Delta x$ setzt. Die Ableitung für alle x definiert die Ableitungsfunktion $f'(x)$. Höhere Ableitungen werden als Ableitung der Ableitung etc. definiert und als erste, zweite, dritte, usw. Ableitung bezeichnet.

Übung: Nehmen Sie an, dass Sie eine Funktion $f(x)$ nur an einem diskreten Satz von eng beieinander liegenden Punkten x_n auf der x -Achse kennen. Sie können dann die Ableitung gemäß ihrer Definition näherungsweise über

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

berechnen. Geben Sie einen entsprechenden Näherungsausdruck für die zweite Ableitung an. (Sie dürfen annehmen, dass die Punkte x_n gleiche Abstände haben, d.h. $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ unabhängig

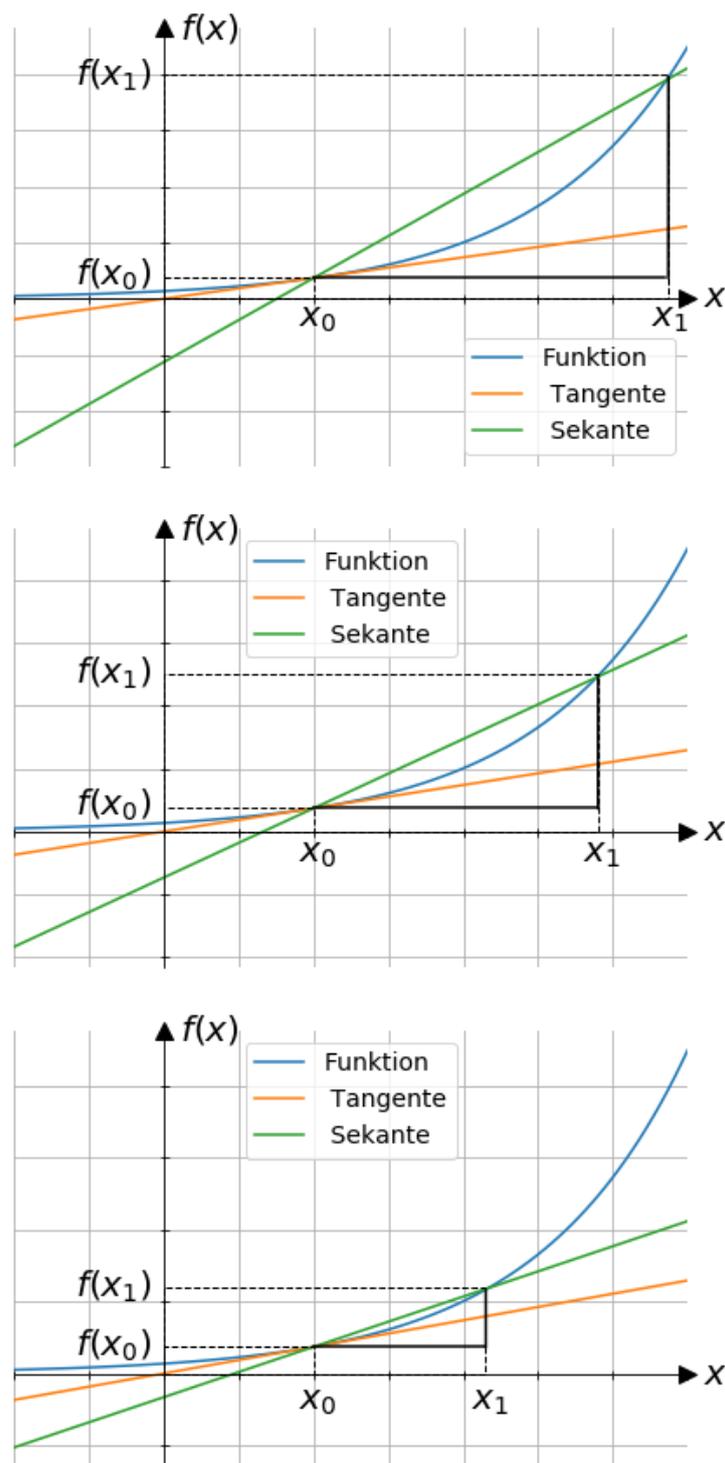


Abbildung 3.4: Ableitung einer Funktion $f(x)$ (blau) im Punkt x_0 . Die Steigung der Tangente (rot) ergibt sich aus der Steigung der Sekanten (grün), wenn deren zweiter Schnittpunkt x_1 gegen x_0 geht. Von oben nach unten rückt x_1 näher an x_0 heran und die Steigung der Sekanten geht gegen die Steigung der Tangente. Die Abbildungen zeigen zusätzlich die Steigungsdreiecke (schwarz) der Sekanten, die dem Differenzenquotienten $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ entsprechen, der im Limes $x_1 \rightarrow x_0$ gegen die Ableitung $f'(x_0)$ strebt.

von n .)

Wir illustrieren die Berechnung der Ableitung mithilfe ihrer Definition am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$. Durch Einsetzen der Funktion in die Definition und Ausmultiplizieren (binomische Formel) erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $f'(x) = 2x$ als *erste Ableitung** der Funktion $f(x) = x^2$.

Ändert ein Körper seinen Ort $x = x(t)$ als Funktion der Zeit t , so entspricht der Differenzenquotient

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (3.5)$$

der *mittleren Geschwindigkeit** im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$. Die *Momentangeschwindigkeit** zur Zeit t erhält man dann im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$, also als Ableitung des Ortes $x(t)$ nach der Zeit,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

Ebenso erhält man aus der Geschwindigkeit $v = v(t)$ als Funktion der Zeit die mittlere Beschleunigung

$$\bar{a}(t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (3.7)$$

und die Momentanbeschleunigung

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (3.8)$$

Zeitableitungen werden in der Physik nach Newton meist mit einem Punkt anstelle des Strichs notiert, also

$$v(t) = \dot{x}(t) \quad (3.9)$$

sowie

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t), \quad (3.10)$$

Doppelte Punkte bezeichnen hier die zweite Ableitung.

3.2 Existenz der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion existiert nur, wenn die Funktion ausreichend glatt ist. So hat beispielsweise die *Betragsfunktion**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

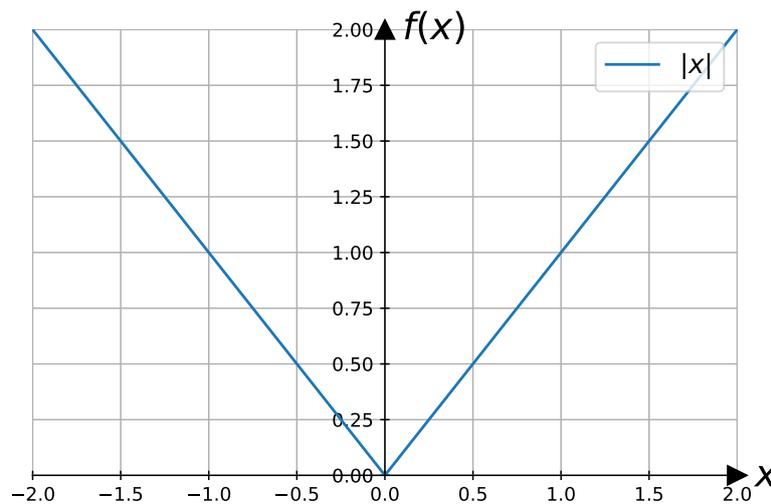


Abbildung 3.5: Betragsfunktion. Bei $x = 0$ hat die Funktion einen "Knick". Dort ist die Steigung nicht eindeutig definiert und die Funktion ist nicht differenzierbar.

keine wohldefinierte Ableitung im Punkt $x = 0$, an dem der Graph der Funktion einen "Knick" hat, siehe Abb. 3.5.

Für alle $x > 0$ ist die Ableitung $f'(x) = 1$, für alle $x < 0$ ist die Ableitung $f'(x) = -1$. Der Ableitung bei $x = 0$ lässt sich also kein eindeutiger Wert zuordnen. Man sagt, $f(x)$ ist im Punkt $x = 0$ nicht differenzierbar**.

In der Physik ist es allerdings durchaus üblich, für die Ableitung der Betragsfunktion die Gleichung

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (3.12)$$

zu schreiben, ohne zu spezifizieren, dass $x = 0$ besonders betrachtet werden muss. Hierbei ist $\operatorname{sgn}(x)$ die *Signum-Funktion***¹

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

ist. (Der Funktionswert bei $x = 0$ ist eine mögliche Wahl. Je nach Zusammenhang wird können auch $\operatorname{sgn}(0) = -1$ oder $\operatorname{sgn}(0) = 0$ eine sinnvolle Definition darstellen.)

Obwohl sie nicht überall differenzierbar ist, ist die Betragsfunktion *stetig***². Anschaulich lassen sich die Funktionsgraphen stetiger Funktionen zeichnen ohne abzusetzen. Die Signum-Funktion ist ein Beispiel einer Funktion, die bei $x = 0$ nicht stetig ist, da hier der Funktionswert von -1 auf 1 springt. Eine weitere, häufig benutzte Funktion mit einem solchen Sprung ist die *Heaviside-Funktion***³

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad (3.14)$$

die nur für positive x von Null verschieden und dann konstant gleich eins ist.

Übung: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x\theta(x)$.

¹Man findet auch die Schreibweise $\operatorname{sgn}x$.

Obwohl die Heaviside-Funktion nicht einmal überall stetig ist, ist ihre Ableitung eine in der Physik weitverbreitete Funktion, die sogenannte *Diracsche δ -Funktion*^{**},

$$\theta'(x) = \delta(x). \quad (3.15)$$

Offensichtlich ist

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}, \quad (3.16)$$

da die Steigung der Funktion an der Sprungstelle unendlich groß ist. Eine genaue Diskussion der Diracschen δ -Funktion gehört nicht in einen Brückenkurs. Aber stellen Sie sich die Ladungsdichte einer Punktladung am Ort $x = 0$ vor. Sie verschwindet überall außer am Nullpunkt, wo sie unendlich groß ist – genau wie die Diracsche δ -Funktion!

Funktionen können aber nicht nur in einzelnen Punkten nicht differenzierbar sein, sondern sogar auf der gesamten reellen Achse. Ein Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

die für alle rationalen Zahlen den Wert Null und für alle irrationalen Zahlen den Wert eins annimmt. Diese Funktion ist nicht nur nirgendwo differenzierbar, sondern sogar auf der gesamten reellen Achse nicht stetig.²

3.3 Kurvendiskussion

Um einen Überblick über das Verhalten einer Funktion $f(x)$ zu gewinnen, bestimmt man im Rahmen der Kurvendiskussion die folgenden Eigenschaften:³

Nullstellen

Die Nullstellen sind die Schnittpunkte der Funktion mit der x -Achse, d.h. diejenigen Punkte x_N , für die

$$f(x_N) = 0 \quad (3.17)$$

gilt.

Man spricht von einer n -fachen Nullstelle, wenn sich die Funktion in der Nähe der Nullstelle x_0 wie $(x - x_0)^n$ verhält. Ist n ungerade, so schneidet die Funktion die x -Achse. Bei geradem n wird die x -Achse vom Graphen der Funktion nur berührt.

Beispiel Kurvendiskussion: Nullstellen.

Die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \quad (3.18)$$

hat dort Nullstellen, wo der Zähler verschwindet (sofern dort der Nenner von Null verschieden ist). Man findet also eine Nullstelle bei

$$x_N = \sqrt[3]{5}, \quad (3.19)$$

²Man kann sogar Funktionen konstruieren, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind. Eine solche Funktion ist als *Weierstraßsches Monster*^{***} bekannt.

³Diese Liste ist nicht vollständig. Natürlich kann man auch weitere Eigenschaften der Funktionen bestimmen wie ihre Symmetrie- oder Monotonieeigenschaften.

s. Abb. 3.6. Dies ist eine einfache Nullstelle.

Divergenzen

*Divergenzen** sind ein Spezialfall von *Singularitäten*** einer Funktion, bei der der Funktionswert gegen $\pm\infty$ strebt,

$$f(x_D) = \pm\infty. \quad (3.20)$$

Ein typisches Beispiel für Divergenzen sind *Polstellen** einer rationalen Funktion, die dann auftreten, wenn der Nenner eine Nullstelle hat, ohne dass der Zähler eine kompensierende Nullstelle besitzt.

Beispiel Kurvendiskussion: Divergenzen.

Die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \quad (3.21)$$

hat dort eine Divergenz, wo der Nenner verschwindet (sofern dort der Zähler von Null verschieden ist). Man findet also eine Divergenz bei

$$x_D = 1, \quad (3.22)$$

s. Abb. 3.6. Dies ist eine Polstelle.

Asymptotisches Verhalten

Als asymptotisches Verhalten bezeichnet man insbesondere das Verhalten der Funktion im Unendlichen. Dort kann die Funktion beispielsweise gegen endliche Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad (3.23)$$

streben. In diesem Fall kann man weiterhin untersuchen, wie die Funktion gegen diesen Grenzwert strebt. Auch wenn die Funktion im Unendlichen divergiert, kann man untersuchen, wie sie gegen Unendlich geht. Dies wird durch unsere Beispielfunktion illustriert.

Wir illustrieren zunächst den Fall, dass die Funktion im Unendlichen gegen einen endlichen Grenzwert strebt. Hierzu betrachten wir die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

Weiterhin gilt

$$f(x) = \frac{x + 1 - 2}{x + 1} = 1 - \frac{2}{x + 1}.$$

Für große $|x|$ können wir die Eins im Nenner vernachlässigen, so dass sich die Funktion dem Grenzwert wie

$$f(x) \underset{|x| \rightarrow \pm\infty}{\sim} 1 - \frac{2}{x}$$

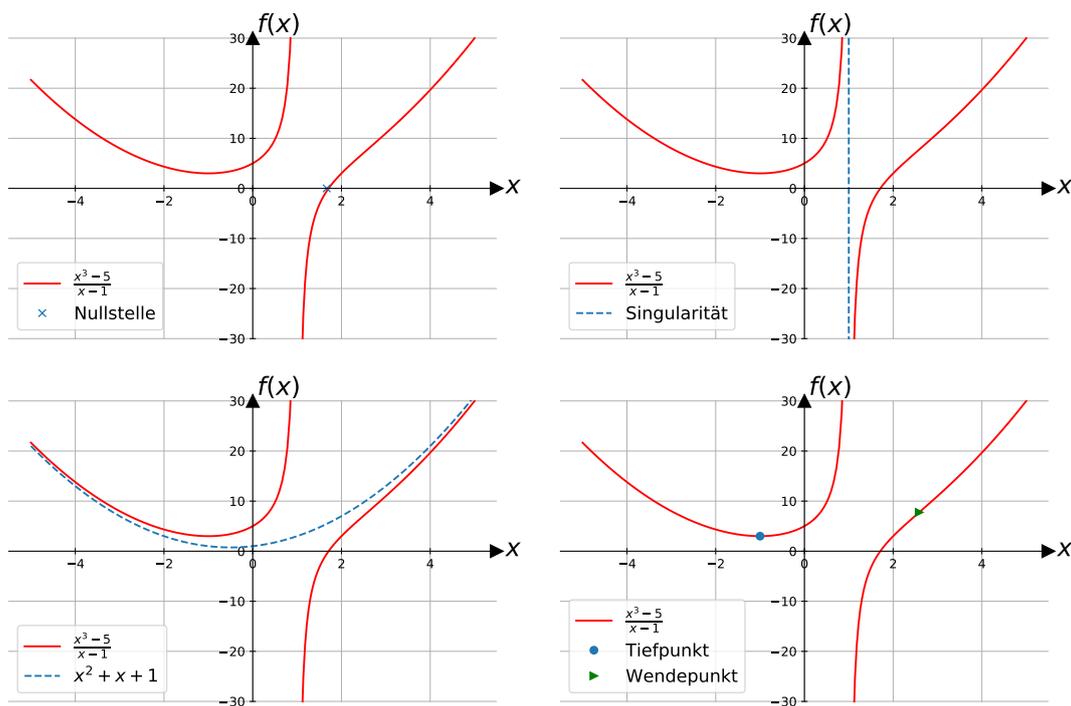


Abbildung 3.6: Kurvendiskussion am Beispiel der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1}$. Oben links: Nullstelle. Es handelt sich hierbei um eine einfache Nullstelle. Oben rechts: Singularität. Bei dieser Divergenz handelt es sich um eine Polstelle. Unten links: Asymptotisches Verhalten. Die gebrochenrationale Funktion divergiert, aber man kann mithilfe der Polynomdivision eine Näherungspolynom angeben, an das sich die Funktion für große $|x|$ anschmiegt. Unten rechts: Minimum (Tiefpunkt) und Wendepunkt der Funktion.

nähert. Hieraus können wir insbesondere ablesen, dass sich die Funktion dem Grenzwert für große negative x von oben und für große positive x von unten nähert.

Beispiel Kurvendiskussion: Asymptotisches Verhalten.

Die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \quad (3.24)$$

haben wir bereits im Abschnitt 2.12 mittels Polynomdivision untersucht, mit dem Resultat

$$f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{4}{x - 1} \quad (3.25)$$

aus Glg. (2.76). Für große $|x|$ geht die gebrochenrationale Funktion also gegen ein Polynom,

$$f(x) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} x^2 + x + 1 \quad (3.26)$$

wie in Abb. 3.6 dargestellt.

Extremstellen

*Extremstellen** sind lokale Maxima (Hochpunkte) oder Minima (Tiefpunkte) der Funktion. Beide haben eine waagerechte Tangente, so dass sie durch

$$f'(x_E) = 0 \quad (3.27)$$

charakterisiert werden, also die Nullstellen der Ableitung. Bei einem Maximum wechselt die Ableitung von positiv nach negativ, so dass $f''(x_E) < 0$. Bei einem Minimum wechselt die Ableitung von negativ nach positiv, so dass $f''(x_E) > 0$. Dies ist in Abb. 3.7 illustriert.

Beispiel Kurvendiskussion: Extremstellen.

Die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \quad (3.28)$$

hat dort Extrema, wo ihre Ableitung

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{(x - 1)^2}$$

verschwindet. Wir beobachten, dass der Zähler eine Nullstelle bei $x_E = -1$ hat und der Nenner dort von Null verschieden ist. (Man kann sich nun mithilfe der Polynomdivision und der quadratischen Gleichung überzeugen, dass der Zähler keine weitere Nullstellen besitzt.) Um sicherzustellen, dass dies ein Extremum ist, und um gegebenenfalls den Typ des Extremums zu bestimmen, berechnen wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 6x - 10}{(x - 1)^3}. \quad (3.29)$$

Einsetzen ergibt $f''(x_E) > 0$, so dass die Funktion bei x_E ein Minimum hat, s. Abb. 3.6.

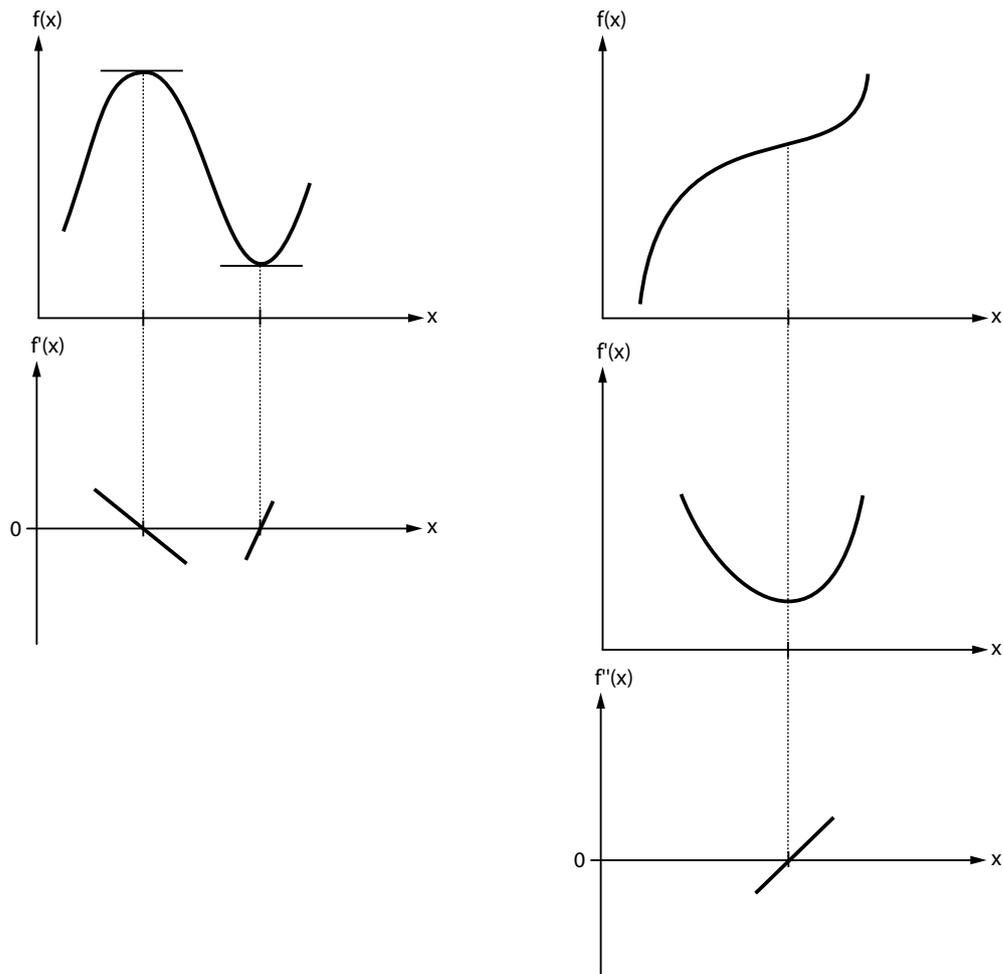


Abbildung 3.7: Extrem- und Wendepunkte. Links: Verhalten der Funktion und der ersten Ableitung bei Maximum und Minimum. Rechts: Verhalten von Funktion sowie ihrer ersten und zweiten Ableitung bei einem Wendepunkt.

Wendepunkte

Ein *Wendepunkt** ist ein Ort maximaler oder minimaler Ableitung und damit eine Nullstelle der zweiten Ableitung der Funktion,

$$f''(x) = 0. \quad (3.30)$$

Die zweite Ableitung gibt auch die *Krümmung** des Funktionsgraphen an, die also bei einem Wendepunkt ihr Vorzeichen ändert. Dies ist in Abb. 3.7 dargestellt.

Beispiel Kurvendiskussion: Wendepunkte.

Die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \quad (3.31)$$

hat dort Wendepunkte, wo ihre in Glg. (3.29) angegebene zweite Ableitung verschwindet. Die Nullstellen des Zählers in Glg. (3.29) lassen sich nicht einfach bestimmen. Numerisch findet man eine Nullstelle des Zählers bei $x_W \approx 1.59$, so dass die Funktion einen Wendepunkt besitzt, s. Abb. 3.6.

3.4 Ableitung einfacher Funktionen

Im vorigen Abschnitt haben wir im Rahmen der Kurvendiskussion bereits Ableitungen berechnet. Nun wollen wir etwas systematischer vorgehen und die Ableitungen elementarer Funktionen ausgehend von der Definition berechnen.

Übung: Denken Sie, bevor Sie weiterlesen, darüber nach, welche Ableitungen der Standardfunktionen Sie tatsächlich nicht nur geglaubt haben, sondern auch begründen können. Mancher Mathematikunterricht mag das Novalis-Zitat:

Reine Mathematik ist Religion.

etwas zu wörtlich genommen haben.

Wir betrachten zunächst Geraden mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = mx + b. \quad (3.32)$$

Einsetzen der Funktionsgleichung in die Definition der Ableitung ergibt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) + b - (mx + b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{mx + m\Delta x - mx}{\Delta x} = m. \end{aligned}$$

Natürlich ist die Ableitung $f'(x) = m$ konstant und gleich der Steigung der Geraden.

Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit Exponenten aus den natürlichen

Zahlen, $n \in \mathbb{N}$, lässt sich mithilfe des binomischen Lehrsatzes berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\Delta x)^j x^{n-j} - x^n \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (\Delta x)^j x^{n-j} \\ &= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir das bekannte Resultat $f'(x) = nx^{n-1}$.

Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ lässt sich mithilfe der Näherung $f(x) = e^x \approx 1 + x$ für kleine x berechnen,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta x - 1}{\Delta x} = e^x \end{aligned}$$

Etwas genauer sollte man eigentlich zunächst zeigen, dass die vernachlässigten Korrekturen zur Näherung $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$ von der Ordnung $(\Delta x)^2$ sind und damit im Zuge der Grenzwertbildung verschwinden. Die Ableitung der Exponentialfunktion ist also gerade die Funktion selbst.

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus, $f(x) = \ln x$, kann auch mithilfe der Näherung $\ln(1+x) \approx x$ bei kleinen x berechnet werden,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln[x(1 + \Delta x/x)] - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x}) + \ln x - \ln x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Übung: Berechnen sie die Ableitung von $f(x) = \log_a x$ mithilfe des Differentialquotienten.
[Lösung: $f'(x) = 1/x \ln a$]

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen $f(x) = \sin x$ und $f(x) = \cos x$ lassen sich mit der Kleinwinkelnäherung $\sin x \approx x$ für kleine x [s. Glg. (2.57)] in Kombination mit den Additionstheoremen berechnen. Außerdem benutzen wir die trigonometrische Identität (Beweis ist eine Übungsaufgabe)

$$\cos x - 1 = -2 \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (3.33)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$mx + b$	m
x^n	$nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Tabelle 3.1: Liste elementarer Ableitungen.

Zunächst berechnen wir die Ableitung des Sinus,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x} \\
 &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\
 &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} - 2 \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^2}{4}}{\Delta x} = \cos x
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also, dass die Ableitung des Sinus gerade der Kosinus ist!
Entsprechend geht man vor, um den Kosinus abzuleiten:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\
 &= \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} - \sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x
 \end{aligned}$$

Die hier berechneten Ableitungen elementarer Funktionen sind noch einmal in der Tabelle 3.1 zusammengefasst.

3.5 Ableitungsregeln

Bei der Ableitung zusammengesetzter Funktionen (sowie weiterer elementarer Funktionen) helfen die Ableitungsregeln: *Summenregel**, *Produktregel**, *Kettenregel** und *Quotientenregel**. Wir wollen diese Regeln aus der Definition der Ableitung herleiten.⁴ Auch diese Herleitungen gehören zur mathematischen Grundbildung!

Summenregel

Die Ableitung einer Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ zweier Funktionen ist die Summe der Ableitun-

⁴Wir bezeichnen diese Herleitungen im Folgenden als Beweise. Es soll aber noch einmal darauf hingewiesen werden, dass wir hier Grenzwerte heuristisch betrachten und daher auch keine Rechenschaft über die Voraussetzungen für die Existenz dieser Grenzwerte ablegen.

gen:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Zum Beweis beginnen wir mit der Definition der Ableitung für $h(x)$ und setzen ein:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Hier haben wir (ohne Beweis) benutzt, dass der Grenzwert einer Summe in die Summe der Grenzwerte umgeschrieben werden kann, sofern die beiden resultierenden Grenzwerte existieren (*Grenzwertsätze***).

Produktregel

Für die Ableitung eines Produkts $h(x) = f(x)g(x)$ zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Zum Beweis müssen wir nun eine geschickte Null zum Zähler hinzuaddieren, um den Differenzenquotienten des Produkts in eine Form zu bringen, die die Differenzenquotienten der einzelnen Funktionen enthält:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) + [-f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x)] - f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \end{aligned}$$

Hier haben wir einen zweiten Grenzwertsatz benutzt, der besagt, dass der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkt der Grenzwerte ist, sofern die Grenzwerte der einzelnen Faktoren existieren. Die "geschickte Null" ist in der dritten Zeile durch die eckigen Klammern gekennzeichnet.

Zwei Beispiele für die Anwendung der Produktregel sind:

$$\begin{aligned} h(x) = x \sin x &\Rightarrow h'(x) = \sin x + x \cos x \\ f(x) = \sin^2 x &\Rightarrow h'(x) = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Kettenregel

Die Ableitung für zwei hintereinander ausgeführte (verkettete) Funktionen, $h(x) = f(g(x))$ ist

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Zum Beweis multiplizieren wir diesmal mit einer geschickten Eins (s. zweiter Faktor im Grenzwert in der dritten Zeile):

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{f(g + \Delta g) - f(g)}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Hier haben wir in der vorletzten Zeile $g = g(x)$ und $\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x)$ definiert. Es folgt dann aus der Stetigkeit der Funktion $g(x)$, dass mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch $\Delta g \rightarrow 0$.

Wir wollen noch einige Beispiele für die Anwendung der Kettenregel angeben:

$$\begin{aligned} h(x) = \cos(\sin x) &\Rightarrow h'(x) = -\sin(\sin x) \cdot \cos x \\ h(x) = \sin(x^2) &\Rightarrow h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x \\ f(x) = \sin^2 x &\Rightarrow h'(x) = 2 \sin x \cos x \quad (\text{vgl. die Beispiele zur Produktregel}) \end{aligned}$$

Außerdem können wir mit der Kettenregel noch die Ableitung von Potenzfunktionen mit beliebigen reellen Exponenten berechnen. Bisher hatten wir gesehen, dass die Ableitung von $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ durch $f'(x) = nx^{n-1}$ gegeben ist. Nun wollen wir zeigen, dass eine entsprechende Formel für $f(x) = x^\alpha$ mit beliebigem reellen α gilt. Hierzu benutzen wir, dass $f(x)$ umgeschrieben werden kann in $f(x) = e^{\alpha \ln x}$, so dass

$$f'(x) = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Quotientenregel

Die Ableitung eines Quotienten $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ wird durch

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

gegeben.

Der Beweis kann auf zwei Weisen geführt werden. Zum einen können wir den Quotienten als Produkt schreiben,

$$h(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \quad (3.34)$$

und zunächst den zweiten Faktor mithilfe der Kettenregel ableiten,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \quad (3.35)$$

Wenden wir nun die Produktregel an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}$$

Alternativ können wir auch die Quotientenregel direkt mithilfe der Definition der Ableitung beweisen, indem wir wieder eine geschickte Null addieren,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] \frac{1}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right\}. \end{aligned}$$

Nun können wir wieder die Grenzwertsätze bemühen und die Grenzwerte der diversen Faktoren separat berechnen. Auf diese Weise erhalten wir

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \quad (3.36)$$

Auch mit der Quotientenregel können wir die Ableitung weiterer elementarer Funktionen berechnen. So finden wir für $f(x) = \tan x$, dass

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (3.37)$$

und für $f(x) = \cot x$, dass

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (3.38)$$

3.6 Umkehrfunktionen

Quadrieren und Wurzelziehen sind ebenso Umkehroperationen wie Exponenzieren und Logarithmieren. Führt man diese Umkehroperationen hintereinander aus, so erhält man unabhängig von der Reihenfolge der Operationen wieder die anfängliche Zahl. Allgemeiner definiert man *Umkehrfunktionen*^{*}:

Umkehrfunktion

$f^{-1}(x)$ heißt Umkehrfunktion zu $f(x)$, wenn

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x. \quad (3.39)$$

Wir werden sehen, dass das Konzept der Umkehrfunktion hilfreich ist, um weitere elementare Ableitungen zu berechnen.

Einige Beispiele für Paare von Umkehrfunktionen sind

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = e^x &\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x \\ f(x) = \ln x &\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x \\ f(x) = \sin x &\Rightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x \\ f(x) = x^\alpha &\Rightarrow f^{-1}(x) = x^{1/\alpha} \end{aligned}$$

Wie am Beispiel der Exponentialfunktion und des Logarithmus illustriert, ist es aufgrund der Symmetrie der Definition unerheblich, welche Funktion des Paares als $f(x)$ und welche als $f^{-1}(x)$ gewählt wird.

Geometrisch sind die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion miteinander über die Spiegelung an der *Winkelhalbierenden*^{*} $f(x) = x$ verbunden. Denn ist $y = f(x)$, so ist $x = f^{-1}(y)$. Die Koordinatenachsen sind also für Funktion und Umkehrfunktion gerade vertauscht. Dies ist in Abb. 3.8 an den Beispielen der Parabel und der Exponentialfunktion illustriert.

Übung: Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen zu $f_1(x) = x^3$ sowie $f_2(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

Die Umkehrfunktion ist vielfach nicht eindeutig definiert. Dies geschieht, wenn die Funktion $f(x)$ für mehrere x -Werte denselben y -Wert annimmt. So nimmt beispielsweise die Parabel für x und $-x$ denselben Wert an. Wie in Abb. 3.8 gezeigt ordnet die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Parabel dann jedem x zwei Werte zu und ist demnach keine Funktion.⁵ Um zu einer konsistenten Definition der Umkehrfunktion zu gelangen, muss man in diesen Fällen einen speziellen Ast der Funktion auswählen, für den jeder y -Wert genau einem x -Wert entspricht. Bei der Parabel kann man sich auf den Ast $x > 0$ beschränken – mit Umkehrfunktion \sqrt{x} – oder auf den Ast $x < 0$ mit Umkehrfunktion $-\sqrt{x}$. Wie wir in Kap. 2.13 gesehen haben, werden Funktionen, für die jeder y -Wert aus dem Wertebereich für einen und nur einen x -Wert aus dem Definitionsbereich angenommen wird, als *bijektiv*^{**} bezeichnet (s. auch Kap. 2.3).⁶

Nicht eindeutig sind auch die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Die Umkehrfunktion des Sinus heißt *Arcussinus*^{*} (mit Funktionsbezeichnung \arcsin), die des Kosinus

⁵Eine Funktion ordnet *per definitionem* jedem x aus dem Definitionsbereich genau einen y -Wert zu.

⁶Ein Mann ist mit einer Mathematikerin verheiratet. Er kommt nach Hause, schenkt seiner Frau einen großen Strauß Rosen und sagt: "Ich liebe Dich!". Sie nimmt die Rosen, haut sie ihm um die Ohren, gibt ihm einen Tritt und wirft ihn aus der Wohnung. Was hat er falsch gemacht? Er hätte sagen müssen: "Ich liebe Dich und nur Dich!"

Quelle: <http://home.teleos-web.de/akracht/anders/witze.html>

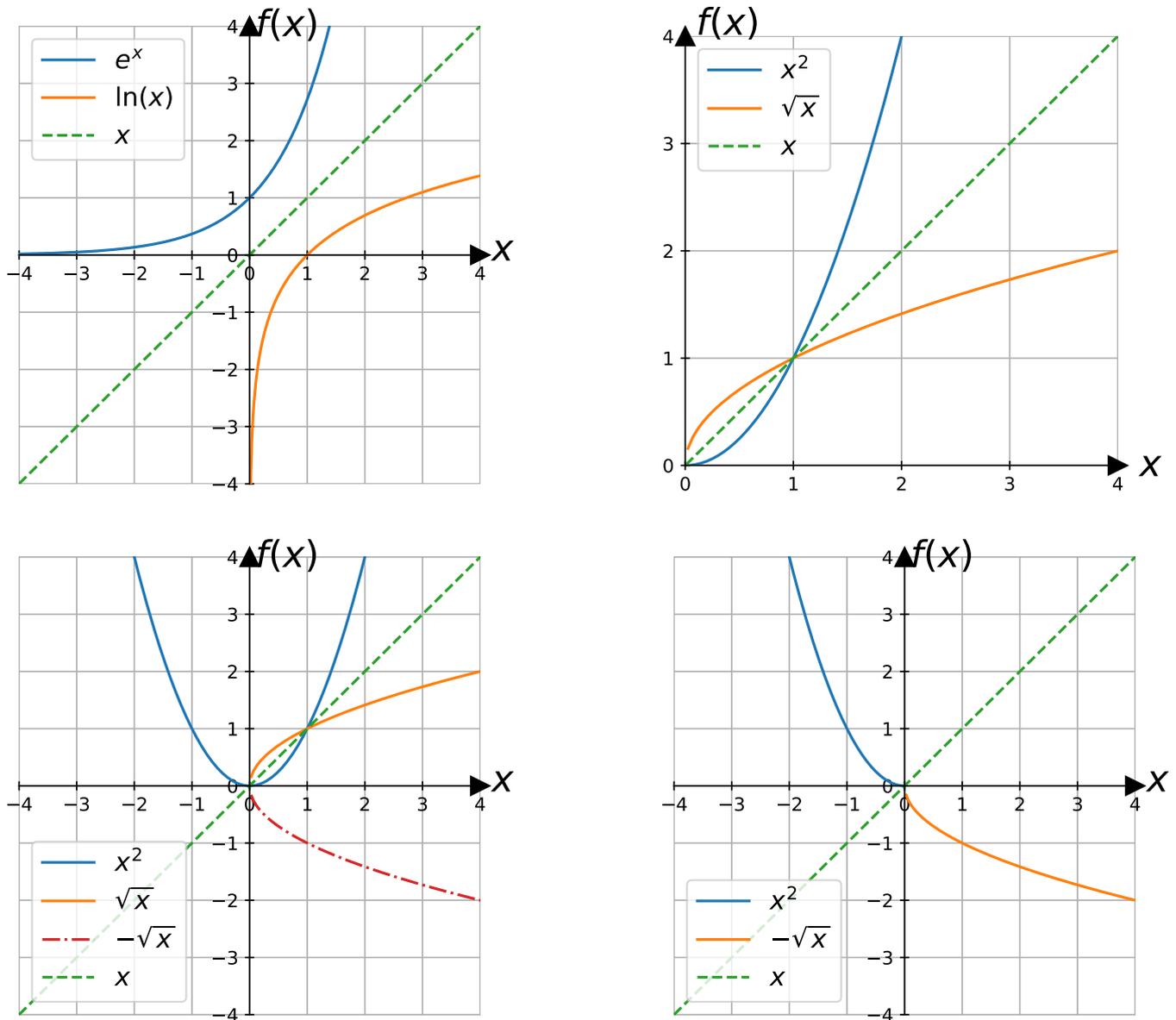


Abbildung 3.8: Umkehrfunktionen. Oben: Beispiel für Paare von Umkehrfunktionen. Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion gehen auseinander durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden (gestrichelt) hervor. Unten: Definition der Umkehrfunktion bei Mehrdeutigkeiten am Beispiel von Parabel und Quadratwurzel. (Unten links) Wählen wir den Ast der Parabel mit $x > 0$, so ist die Umkehrfunktion \sqrt{x} . (Unten rechts) Alternativ können wir den Ast der Parabel mit $x < 0$ wählen. Dann ist die zugehörige Umkehrfunktion $-\sqrt{x}$.

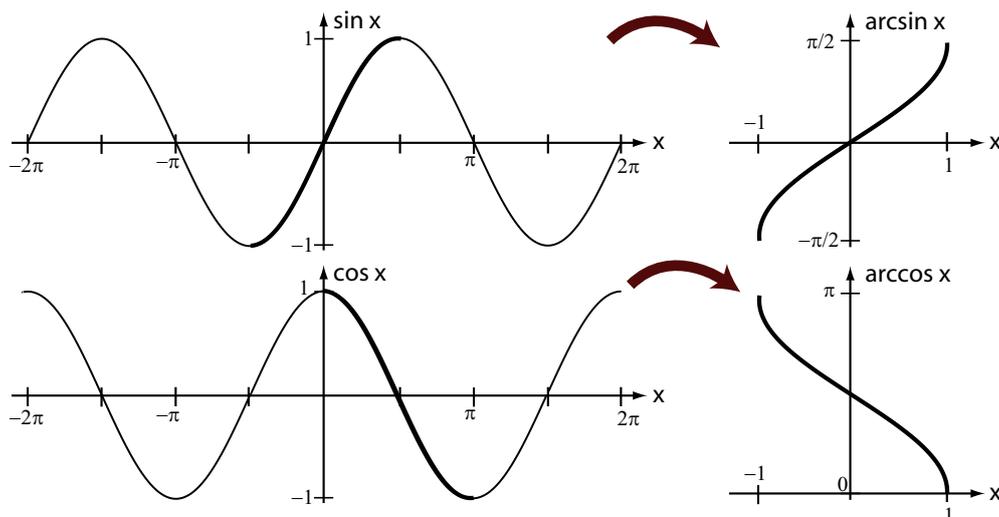


Abbildung 3.9: Arcussinus und Arcuscosinus als Umkehrfunktionen von Sinus und Kosinus. Aufgrund der Mehrdeutigkeit der trigonometrischen Funktionen wird ein spezieller Ast (fett) zur Definition der Arcusfunktionen ausgewählt.

*Arcuskosinus** (mit Funktionsbezeichnung \arccos)⁷. Man definiert den Arcussinus, indem man den Sinus für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ betrachtet. Der resultierende Funktionsgraph des Arcussinus ist in Abb. 3.9 dargestellt. Für den Arcuskosinus (s. auch Abb. 3.9) beschränkt man den Definitionsbereich des Kosinus auf $x \in [0, \pi]$.

Übung: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Geben Sie zwei mögliche Definitions- und Wertebereiche an, für die die Funktion bijektiv ist und die Umkehrfunktion existiert.

3.7 Ableitung der Umkehrfunktionen

Ist die Ableitung von $f(x)$ bekannt, so kann man die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ durch folgende Regel erhalten:

Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zur Funktion $f(x)$ ist

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (3.40)$$

Graphisch liegt dieser Regel die folgende Interpretation zugrunde. Der Graph der Umkehrfunktion geht aus dem Graphen der Funktion durch Austausch von x - und y -Achse hervor. Dementsprechend ist die Steigung der Umkehrfunktion das Inverse der Steigung der Funktion.

Formal beweisen lässt sich die Regel, indem wir beide Seiten der Gleichung $f(f^{-1}(x)) = x$ ableiten, so dass $[f(f^{-1}(x))] = 1$. Dies ergibt mithilfe der Kettenregel

$$f'(f^{-1}(x))[f^{-1}(x)]' = 1. \quad (3.41)$$

Gleichung (3.40) folgt nun durch einfaches Umformen.

⁷Auf Taschenrechnern werden diese Funktionen meist als \sin^{-1} und \cos^{-1} bezeichnet.

Wir illustrieren diese Regel zunächst durch die Ableitung der Wurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, der Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$. Wir erhalten mit $f'(x) = 2x$, dass

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Dies ist natürlich das bekannte Resultat für die Ableitung von \sqrt{x} (einem Spezialfall der allgemeinen Ableitungsregel für x^α).

Übung: Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion zu $f(x) = \ln(1+x^2)$ mithilfe der Ableitungsregel (3.40). (Geben Sie auch geeignete Definitions- und Wertebereiche an, damit die Funktion bijektiv ist und die Umkehrfunktion existiert.) Leiten Sie die Umkehrfunktion auch explizit her und prüfen Sie so Ihr Resultat.

Wir können nun mit dieser Regel auch die Ableitungen der inversen trigonometrischen Funktionen berechnen. Mithilfe von Glg. (3.40) erhalten wir

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

wobei wir den trigonometrischen Pythagoras benutzt haben. Der trigonometrische Pythagoras legt $\cos x$ nur bis auf ein Vorzeichen fest. Um dieses Vorzeichen festzulegen, lesen wir aus Abb. 3.9 ab, dass die Ableitung von $\arcsin x$ überall positiv ist, so dass wir das Resultat

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.42}$$

finden. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} (\arccos x)' &= \frac{1}{\sin(\arccos x)} \\ &= \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

wobei wir bereits die mit Abb. 3.9 konsistente Vorzeichenwahl getroffen haben.

Weiterhin können wir die Ableitungen der Umkehrfunktionen des Tangens und des Kotangens bestimmen, also des *Arcustangens** (mit Funktionsbezeichnung \arctan) und den *Arcuskotangens** (mit Funktionsbezeichnung arccot). Wir beginnen mit dem Arcustangens. Aus Glg. (3.40) folgt mit $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, dass

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \cos^2(\arctan x). \tag{3.43}$$

Um die rechte Seite zu vereinfachen, stellen wir mithilfe des trigonometrischen Pythagoras einen Zusammenhang zwischen Kosinus und Tangens her. Wir finden

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad (3.44)$$

so dass

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}. \quad (3.45)$$

Setzen wir dies in Glg. (3.43) ein, so erhalten wir

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (3.46)$$

Übung: Bestimmen Sie einen geeigneten Definitionsbereich des Tangens, um den Arcustangens zu definieren.

Analog können wir die Ableitung des Arcuskotangens bestimmen. Aus Glg. (3.40) folgt mit $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, dass

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2(\arctan x)}} = -\sin^2(\operatorname{arccot} x). \quad (3.47)$$

Um die rechte Seite zu vereinfachen, stellen wir diesmal einen Zusammenhang zwischen Sinus und Kotangens her. Wir finden

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1, \quad (3.48)$$

so dass

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}. \quad (3.49)$$

Setzen wir dies in Glg. (3.47) ein, so erhalten wir

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (3.50)$$

Übung: Bestimmen Sie einen geeigneten Definitionsbereich des Kotangens, um den Arcuskotangens zu definieren.

Die in diesem Kapitel berechneten Ableitungen der elementaren Funktionen sind noch einmal in Tab. 3.2 zusammengestellt. Hier haben wir bereits die Ableitungen der inversen hyperbolischen Funktionen (Areafunktionen) aufgenommen, die Sie im Rahmen der Übungsaufgaben bestimmen.

3.8 Differentiale

Bisher haben wir die in der Schule übliche Notation $f'(x)$ für die Ableitung der Funktion $f(x)$ verwendet. In der Physik ist eine alternative Schreibweise mithilfe von *Differentialen* ** weit verbreitet:

$f(x)$	$f'(x)$
$mx + b$	m
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\cot x$	$-1/\sin^2 x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{coth} x$	$-1/\sinh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\operatorname{arcosh} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x$	$1/(1-x^2) \quad x < 1$
$\operatorname{arcoth} x$	$1/(1-x^2) \quad x > 1$

Tabelle 3.2: Liste elementarer Ableitungen.

Notation für Ableitungen mithilfe von Differentialen

Ableitungen der Funktion $f(x)$ können alternativ mithilfe von Differentialen geschrieben werden:

$$f'(x) \leftrightarrow \frac{df}{dx}, \quad f''(x) \leftrightarrow \frac{d^2f}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) \leftrightarrow \frac{d^n f}{dx^n}. \quad (3.51)$$

Um den Ursprung der Differentialschreibweise zu verstehen, ist es hilfreich, näherungsweise Ausdrücke für die Ableitung von Funktionen anzugeben, die nur an einer diskreten Anzahl von Stützstellen (im Abstand Δx) bekannt sind. Die erste Ableitung ist dann näherungsweise der Quotient der Änderung (angedeutet durch d) der Funktion und der Änderung des Arguments zwischen beieinander liegenden Stützstellen,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x+\frac{\Delta x}{2}) - f(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx}.$$

Die erste Zeile gibt verschiedene mögliche diskrete Näherungen für die Ableitung. Im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ konvergieren alle Näherungen gegen denselben Wert. Für endliche, aber kleine Δx sind demnach die Unterschiede zwischen den verschiedenen Näherungen für die Ableitung von der Ordnung Δx und somit klein. Einen entsprechenden Ausdruck können wir auch für die zweite

Ableitung angeben:

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{f'(x) - f'(x - \Delta x)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &\approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \\ &\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

Der Zähler ist die Differenz einer Differenz (angedeutet durch d^2), der Nenner ist das Quadrat einer Differenz.

Die Differentialschreibweise bezieht sich also direkt auf den Differenzenquotienten. Einige Ableitungsregeln nehmen auf diese Weise eine sehr eingängige Form an. Dies gilt zunächst für die Kettenregel:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

Formal scheint sich also die Kettenregel in der Differentialschreibweise auf die Bruchrechnung zu reduzieren.

Gleiches gilt für die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen. Setzen wir $y = f(x)$ und somit $x = f^{-1}(y)$, so gilt

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{3.52}$$

und

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Auch wenn sich in diesen beiden Fällen die Ableitungsregeln den Anschein von Bruchrechnung geben, so ist dies natürlich mit Vorsicht zu genießen. Denn man hat es ja mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten zu tun! Allerdings kann man dies formal auf solidere Beine stellen, wenn man das Differential als den Zuwachs der Tangente an die Funktion – und nicht als Zuwachs der Funktion selbst – interpretiert. Da die Steigung der Tangente durch die Ableitung gegeben ist, definieren wir also

$$df = f'(x)dx.$$

Mit dieser Definition kann dann natürlich $\frac{df}{dx}$ trivialerweise als Bruch betrachtet werden. Wir wollen diese Definition an einigen Beispielen illustrieren:

$$\begin{array}{lll} z = x^2 & dz = 2x dx & d(x^2) = 2x dx \\ z = e^x & dz = e^x dx & d(e^x) = e^x dx \\ z = \sin x & dz = \cos x dx & d(\sin x) = \cos x dx \end{array}$$

Schließlich folgen aus den Ableitungsregeln auch Rechenregeln für die Differentiale:

Rechenregeln für Differentiale.

Summenregel: $d(f + g) = df + dg$

Produktregel: $d(fg) = f dg + g df$

Quotientenregel: $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$

Kettenregel: $df = \frac{df}{dg} dg$

3.9 Aufgaben

Aufgabe 3.1 Definition der Ableitung

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen direkt mithilfe der Definition (Grenzwert des Differenzenquotienten):

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $g(s) = \frac{s-1}{s+1}$

Aufgabe 3.2 Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x)$ für die folgenden Funktionen.

- $f(x) = 1 - 2x$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Aufgabe 3.3 Polynom

Ein Polynom 3. Grades habe folgende Eigenschaften:

- (a) Der Graph der Funktion geht durch den Ursprung.
 - (b) Die Tangente an die Funktion im Punkt $P(2 | 8/3)$ ist horizontal;
 - (c) Das Polynom hat einen Wendepunkt bei $x = 4$.
- Geben Sie die Funktionsgleichung an.
 - Prüfen Sie, ob das Polynom weitere Extrema besitzt? Geben Sie für alle Extrema an, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.
 - Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 3.4 Zwei Kurven

Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1}{8}x^4 - x$. Gesucht wird $f(x)$, ein Polynom 3. Grades, mit den folgenden Eigenschaften.

- $f(x)$ hat mit $g(x)$ zwei Nullstellen gemeinsam.
- In der Nullstelle mit positiver x -Koordinate hat $f(x)$ gleichzeitig einen Wendepunkt.
- In der anderen Nullstelle schneiden sich die Kurven der Funktionen rechtwinklig.

Bestimme die Funktionsgleichung von $f(x)$.

Aufgabe 3.5 Alle Ableitungen

- Geben Sie alle Ableitungen von $f(x) = x^4$ an.
- Verallgemeinern Sie das Resultat und geben Sie alle Ableitungen von $f(x) = x^n$ an, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3.6 Geradengleichung der Tangente I

Geben Sie die Geradengleichung der Tangente an folgende Funktionen bei den angegebenen x -Werten an:

- $f(x) = \sqrt{x}$ im Punkt $x = 4$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ im Punkt $x = 2$

Aufgabe 3.7 Geradengleichung der Tangente II

Geben Sie die Geradengleichung der Tangente an eine (differenzierbare) Funktion $f(x)$ in allgemeiner Form an.

Aufgabe 3.8 Gleiche Ableitungen

- Zeigen Sie, dass $f(x) = e^x$ und die Parabel $p(x) = \frac{1}{2}e(x^2 + 1)$ am Punkt $x = 1$ in Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen.
- Zeigen Sie, dass die Parabel

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

am Punkt $x = x_0$ den gleichen Funktionswert sowie die gleiche erste und zweite Ableitung besitzt wie die Funktion $f(x)$, d.h.

$$p(x_0) = f(x_0)$$

$$p'(x_0) = f'(x_0)$$

$$p''(x_0) = f''(x_0)$$

Wie unterscheiden sich die höheren Ableitungen?

- Können Sie ein Polynom 3. Grades angeben, für das die ersten drei Ableitungen am Punkt $x = x_0$ mit den Ableitungen der Funktion $f(x)$ übereinstimmen?
- Berechnen Sie die Geradengleichung der Tangente (s.o.) sowie das Polynom 2. Grades, dessen ersten beiden Ableitungen mit der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ am Punkt $x = 4$ übereinstimmen. Stellen Sie Funktion, Tangente und Polynom 2. Grades graphisch dar.

Aufgabe 3.9 Ableitung

Berechnen Sie die erste Ableitung:

- $f(x) = (1 - 3x^2)^4$
- $f(t) = t^2 - 5x + 2$
- $f(x) = \frac{1-x}{\sin \alpha}$
- $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$
- $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x}$
- $f(x) = (1 - 3x^2)^4$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 2}$
- $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Aufgabe 3.10 Hoch- und Tiefpunkte

Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie eventuelle Hoch- und Tiefpunkte

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

Aufgabe 3.11 Wendepunkte

Skizzieren Sie die Funktionen und bestimmen Sie eventuelle Wendepunkte:

- $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$
- $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Aufgabe 3.12 Ableitungen

Bilden Sie die Ableitungen von

- $\sin(x^2)$
- $\sin^2 x$
- $\sin[a \cos(bx)]$

Aufgabe 3.13 Funktionen und ihre Ableitungen

Skizzieren Sie $f(x)$ und $f'(x)$ für die folgenden Funktionen:

- $x^2 e^{-x}$
- $e^{-ax^2} \quad (a > 0)$
- $\frac{1}{e^x + 1}$

Aufgabe 3.14 Funktionsgraphen

Bestimmen Sie Verlauf und eventuelle Extrema von

- $x \ln x$
- $\ln \frac{x}{(x+1)^2}$

Aufgabe 3.15 Hyperbelfunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen heißen $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{artanh} x$ und $\operatorname{arcoth} x$. Berechnen Sie die Ableitungen von $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$ mithilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen.

4. Integralrechnung

Der Integralrechnung geht von der geometrischen Fragestellung aus, die Fläche unter Kurven zu berechnen, z.B. zur Berechnung des Flächeninhaltes geometrischer Objekte wie Kreise und Ellipsen. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung identifiziert diese Fragestellung als Umkehroperation der Differentiation, was einem sofort erlaubt, alle Ergebnisse der Differentialrechnung in die Integralrechnung zu übertragen. Während aber das Berechnen von Ableitungen beliebiger elementarer Funktionen rein schematisch erfolgen kann, ist die Integration im Allgemeinen eher eine Kunst, die mathematische Fingerfertigkeit benötigt. Gewisse Klassen von Integralen sind allerdings mit Standardmethoden lösbar, die wir in diesem Kapitel kennenlernen werden.

4.1 Integrale

Das *bestimmte Integral** einer Funktion $f(x)$,¹

$$\int_a^b dx f(x), \quad (4.1)$$

gibt die zwischen Funktionsgraph des *Integranden** $f(x)$, der x -Achse und den durch die *Integralgrenzen** a und b gegebenen Senkrechten eingeschlossene Fläche an wie in Abb. 4.1 illustriert. Flächen unterhalb der x -Achse werden mit umgekehrtem Vorzeichen gezählt. Ebenso dreht sich das Vorzeichen um, wenn die Integralgrenzen vertauscht werden.

Zur Berechnung des Integrals teilt man das Integrationsintervall zwischen unterer und oberer Integralgrenze in viele kleine Segmente. Nun nähert man die zu berechnende Fläche durch Rechtecke, deren Breite durch die Segmente und deren Höhe durch den Funktionsgraphen (z.B. am linken Ende des Segments) gegeben ist. Im Grenzfall unendlich vieler Segmente² geht die Fläche unter den Rechtecken in die gesuchte Fläche unter dem Funktionsgraphen über.

Diese Strategie wird durch die Definition des *Riemannsches Integrals** formalisiert:

¹In der physikalischen Literatur wird das dx fast ausnahmslos vor dem Integranden und nicht wie in der Schule üblich nach dem Integranden geschrieben.

²Hier nehmen wir der Einfachheit halber an, dass alle Segmente die gleiche Breite haben. Ist dies nicht der Fall, muss die Anzahl der Segmente derart gegen Unendlich gehen, dass gleichzeitig die Breite aller Segmente gegen Null tendiert.

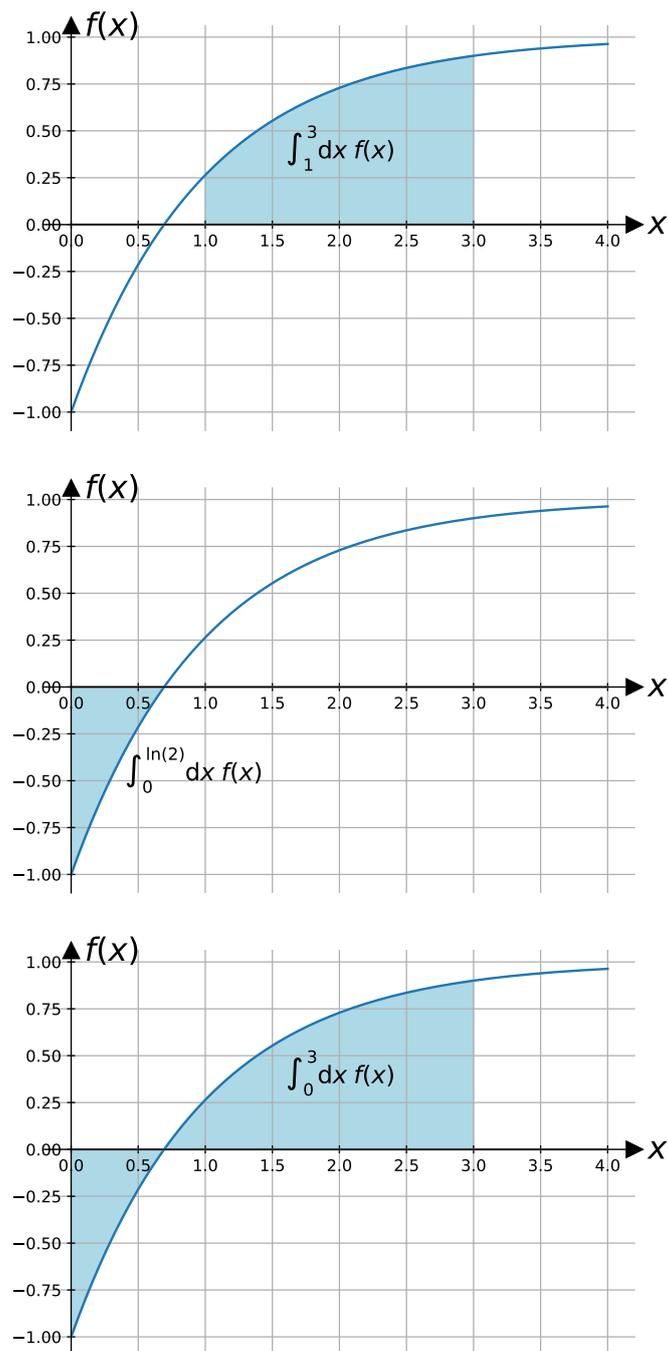
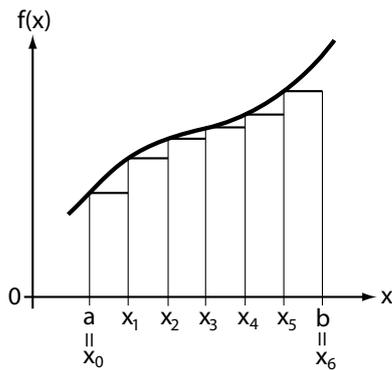


Abbildung 4.1: Zur Definition bestimmter Integrale. Das bestimmte Integral gibt die vom Funktionsgraphen $f(x)$, der x -Achse und den Senkrechten bei den Integralgrenzen eingeschlossene Fläche (hellblau) an. Dies ist hier für die Funktion $f(x) = 1 - 2e^{-x}$ illustriert. (Oben) Sind die Funktionswerte im gesamten Integrationsintervall positiv und die obere Grenze (hier: $x = 3$) größer als die untere Grenze (hier: $x = 1$), so wird die gesamte Fläche positiv gezählt. Vertauschen der Integralgrenzen gäbe eine Fläche desselben Betrags, aber mit negativem Vorzeichen. (Mitte) Sind die Funktionswerte im gesamten Integrationsintervall negativ und die obere Grenze (hier: $x = \ln(2)$) größer als die untere Grenze (hier: $x = 0$), so wird die gesamte Fläche negativ gezählt. (Unten) Wechselt der Integrand innerhalb des Integrationsintervalls sein Vorzeichen, so werden Flächen oberhalb und unterhalb der x -Achse mit entgegengesetztem Vorzeichen berücksichtigt. Das Integral gibt also eine resultierende Fläche an.

Riemannsches Integral



$$\int_a^b dx f(x)$$

= Fläche eingeschlossen von Kurve f ,
 x -Achse und Senkrechten bei $x = a$ und $x = b$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

= bestimmtes Integral

Die Summe auf der rechten Seite wird als *Riemann-Summe** bezeichnet.

Die einzelnen Terme in der Riemann-Summe geben gerade die Flächen der Rechtecke wieder: $(x_{i+1} - x_i)$ ist die Breite und $f(x_i)$ die Höhe des Rechtecks.

Die Definition des Riemann-Integrals ist so gewählt, dass Flächen vorzeichenbehaftet sind. Flächen unterhalb der x -Achse (aber mit Integrationsgrenzen $b > a$) werden negativ gezählt (da $f(x_i) < 0$). Ebenso ist die Breite der Rechtecke negativ, wenn $b < a$. Daraus folgt insbesondere, dass sich das Vorzeichen des Integrals ändert, wenn man obere und untere Integrationsgrenze vertauscht,

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x). \quad (4.2)$$

Das Riemannsche Integral gibt also im allgemeinen eine *resultierende Fläche** wie in Abb. 4.1 illustriert.

Aus der Definition ergibt sich auch, dass sich Integrale über benachbarte Integrationsbereiche zusammenfassen lassen:

$$\int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x). \quad (4.3)$$

In einfachen Fällen kann man bestimmte Integrale direkt mithilfe der Riemann-Summe berechnen. Für die Funktion $f(x) = x$ in den Grenzen von 0 bis 1 erhalten wir, indem wir den Integrationsbereich in $N + 1$ gleiche Segmente (so dass $x_i = \frac{i}{N+1}$) unterteilen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx f(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N x_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{i}{N+1} \left(\frac{i+1}{N+1} - \frac{i}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N \frac{i}{(N+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N+1)}{(N+1)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die Gaußsche Summenformel (2.33) benutzt. In diesem Fall ist das Integral natürlich die Fläche eines Dreiecks, die man auch direkt geometrisch berechnen kann.

Fasst man das Integral selbst als Funktion der oberen Grenze (bei fester, aber beliebiger unterer Grenze) auf, so bezeichnet man die resultierende Funktion $F(x)$ als *Stammfunktion** von $f(x)$:

$$F(x) = \int^x dx' f(x') + C. \quad (4.4)$$

Da die untere Grenze zwar fest, aber beliebig ist, ist die Stammfunktion nur bis auf eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ definiert. Denn zwei Integrale mit gleicher oberer Grenze x , aber unterschiedlichen unteren Grenzen a und b unterscheiden sich um die von x unabhängige Fläche

$$\int_a^b dx' f(x') = \int_b^x dx' f(x') - \int_a^x dx' f(x') \quad (4.5)$$

und somit um eine Konstante.

Mit Kenntnis der Stammfunktion können bestimmte Integrale direkt berechnet werden, denn

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{x_0}^b dx f(x) - \int_{x_0}^a dx f(x) = F(b) - F(a). \quad (4.6)$$

Wir sehen, dass sich bei der Berechnung bestimmter Integrale die unbestimmte additive Konstante der Stammfunktion heraushebt. Wir werden im Folgenden sehen, wie die Stammfunktion effizient bestimmt werden kann.

Man notiert die Stammfunktion auch einfacher als

$$F(x) = \int dx f(x) \quad (4.7)$$

und bezeichnet sie als *unbestimmtes Integral** der Funktion $f(x)$. Man beachte, dass ein bestimmtes Integral einer reellen Zahl entspricht, während das unbestimmte Integral eine Funktion darstellt.

Bemerkung.

Bei bestimmten Integralen sollte darauf geachtet werden, dass Integrationsvariable und Integralgrenzen unterschiedlich notiert werden. Ein Ausdruck wie

$$F(x) = \int_a^x dx f(x) \quad (4.8)$$

ist widersinnig.

4.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für die Berechnung von Integralen gibt es natürlich einfachere Verfahren als die direkte Berechnung der Riemann-Summe. Diese Verfahren beruhen auf dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für die Stammfunktion $F(x) = \int^x dx' f(x') + C$ gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad (4.9)$$

Dieser Satz besagt, dass Integration und Differentiation im Wesentlichen Umkehroperationen sind. Kennt man die Ableitung $f(x) = F'(x)$ einer Funktion $F(x)$, so können wir $F(x) + C$ als Stammfunktion von $f(x)$ identifizieren. Aus der Tabelle der Ableitungen 3.2 können wir also unmittelbar die Tabelle 4.1 von unbestimmten Integralen (bzw. Stammfunktionen) gewinnen.

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$1/x$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$1/\cos^2 x$	$\tan x + C$
$1/\sin^2 x$	$-\cot x + C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + C$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$-\arccos x + C$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x + C$
$1/(1+x^2)$	$-\operatorname{arccot} x + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$1/\cosh^2 x$	$\tanh x + C$
$1/\sinh^2 x$	$-\operatorname{coth} x + C$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{x^2+1} + C$
$1/\sqrt{x^2-1}$	$-\operatorname{arcosh} x + C$
$1/(1-x^2) \quad x < 1$	$\operatorname{artanh} x + C$
$1/(1-x^2) \quad x > 1$	$\operatorname{arcoth} x + C$

Tabelle 4.1: Funktionen und ihre Stammfunktionen. Diese Liste folgt aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung direkt aus der Liste 3.2 der Ableitungen elementarer Funktionen.

Zum Beweis des Hauptsatzes³ berechnen wir einfach die Ableitung von $F(x)$ mithilfe der Definition der Ableitung. Schreiben wir die Stammfunktion als

$$F(x) = \int_{x_0}^x dx' f(x') \quad (4.10)$$

mit fester, aber beliebiger unterer Grenze x_0 , so erhalten wir

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_0}^{x+\Delta x} dx' f(x') - \int_{x_0}^x dx' f(x') \right] \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dx' f(x') \right\} \end{aligned}$$

Das resultierende Integral in der letzten Zeile hat einen gegen Null tendierenden Integrationsbereich. Sofern $f(x)$ genügend glatt ist, können wir die Funktion über diesen Bereich als Konstante nähern. Da diese Näherung für $\Delta x \rightarrow 0$ beliebig genau wird (s. Abb. 4.2), erhalten wir

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x - x)f(x)}{\Delta x} = f(x)$$

und damit die Aussage des Hauptsatzes.

³Eine musikalische Version finden Sie unter diesem [Link](#).

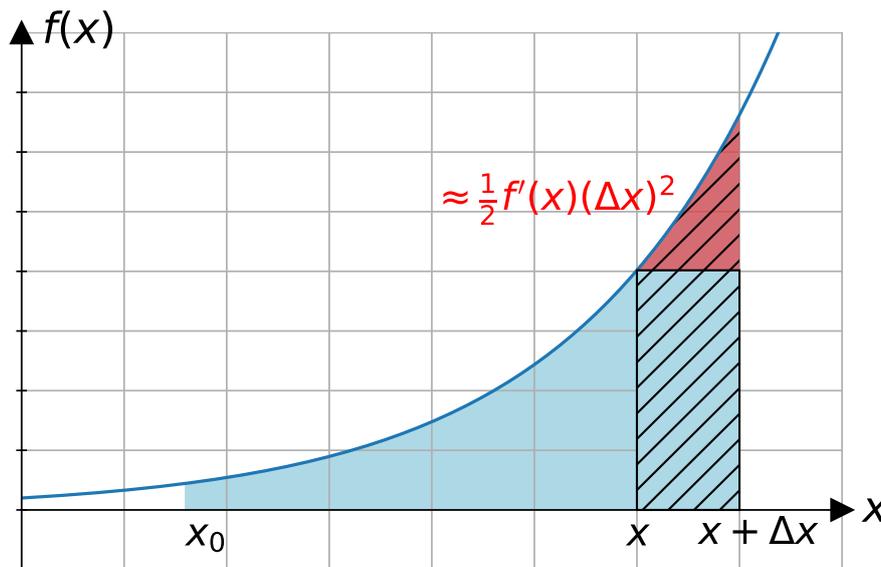


Abbildung 4.2: Zum Beweis des Hauptsatzes. Der Zähler des Differenzenquotienten von $F(x)$ entspricht der schraffierten Fläche, resultierend aus der Differenz der farblich markierten Fläche $[F(x + \Delta x)]$ und der farblich markierten Fläche ohne schraffierten Bereich $[F(x)]$. Für kleine Δx kann die schraffierte Fläche durch die Fläche des eingezeichneten Rechtecks (blau und schraffiert) ersetzt werden, wobei der Fehler proportional zu Δx^2 ist. Denn die fehlende Fläche ist näherungsweise ein Dreieck (rot) der Breite Δx und der Höhe $f'(x)\Delta x$ und somit der Fläche $\frac{1}{2}f'(x)(\Delta x)^2$.

4.3 Uneigentliche Integrale

*Uneigentliche Integrale*** haben einen Integrationsbereich, der sich nach $+\infty$ oder $-\infty$ erstreckt oder der eine Divergenz des Integranden enthält (s. Abb. 4.4). In beiden Fällen kann das Integral trotzdem einen endlichen Wert annehmen.

Wir betrachten zunächst das Integral über $f(x) = e^x$ in den Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis 0. Die Stammfunktion zu $f(x)$ ist die Exponentialfunktion selbst, so dass wir

$$\int_{-\infty}^0 dx e^x = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{-b}^0 dx e^x = \lim_{b \rightarrow -\infty} [e^0 - e^{-b}] = 1$$

und damit tatsächlich ein endliches Resultat erhalten. Integrale über exponentiell abfallende Funktionen sind also konvergent, auch wenn sich der Integrationsbereich bis ins Unendliche erstreckt.

Uneigentliche Integrale über abfallende Potenzfunktionen $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (mit $\alpha > 0$) können, müssen aber nicht konvergent sein, s. Abb. 4.4. Mithilfe der bekannten Stammfunktion finden wir (mit $\alpha \neq 1$)

$$\int_1^\infty dx \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b dx \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) \right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases}$$

Uneigentliche Integrale über eine abfallende Potenzfunktion konvergieren also für Potenzen $\alpha > 1$ und divergieren für $\alpha < 1$. Den Fall $\alpha = 1$ müssen wir separat betrachten und erhalten

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln 1] \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Auch in diesem Fall erhalten wir also ein divergierendes Resultat. Man beachte, dass die Integrationsbereiche keine Divergenzen des Integranden ($x = 0$) enthalten.

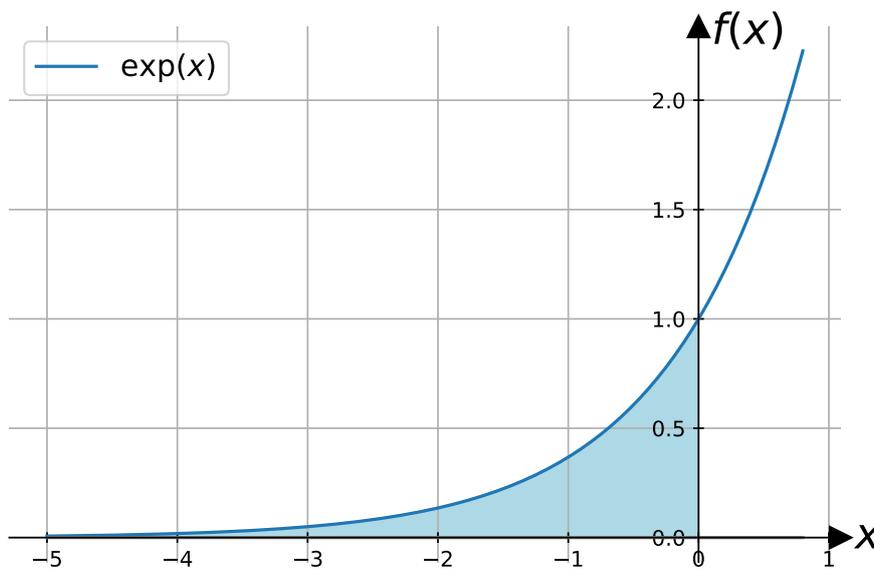


Abbildung 4.3: Uneigentliches Integral über die Exponentialfunktion. Die Fläche unter der Kurve ist trotz des unendlich großen Integrationsbereichs $[-\infty, 0]$ endlich.

Divergiert der Integrand innerhalb oder am Rande des Integrationsbereichs (s. Abb. 4.4), so kann das entsprechende uneigentliche Integral wieder konvergieren oder divergieren. Wir betrachten speziell allgemeine Potenzfunktionen $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, wobei als untere Integrationsgrenze 0 gewählt wird und wir demnach bis zu einer Divergenz des Integranden integrieren. Mit der bekannten Stammfunktion finden wir ($\alpha \neq 1$)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} (1^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}) \right] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Potenzartige Singularitäten sind also integrabel, sofern sie langsamer als $\frac{1}{x}$ divergieren ($\alpha < 1$). Die uneigentlichen Integrale existieren nicht, wenn $\alpha > 1$. Den Grenzfall $\alpha = 1$ muss wieder separat behandelt werden:

$$\int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^1 \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow 0} [\ln(1) - \ln(b)] \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Auch in diesem Fall existiert das uneigentliche Integral also nicht.

Übung: Diskutieren Sie, ob die uneigentlichen Integrale

$$\int_3^\infty dx \frac{5}{x^2-9} \quad \text{und} \quad \int_4^\infty dx \frac{5}{x^2-9} \quad (4.14)$$

konvergieren.

4.4 Partielle Integration

Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung können wir aus den Ableitungsregeln entsprechende Integrationsmethoden ableiten. Die Methode der *partiellen Integration** folgt aus der Produktregel:

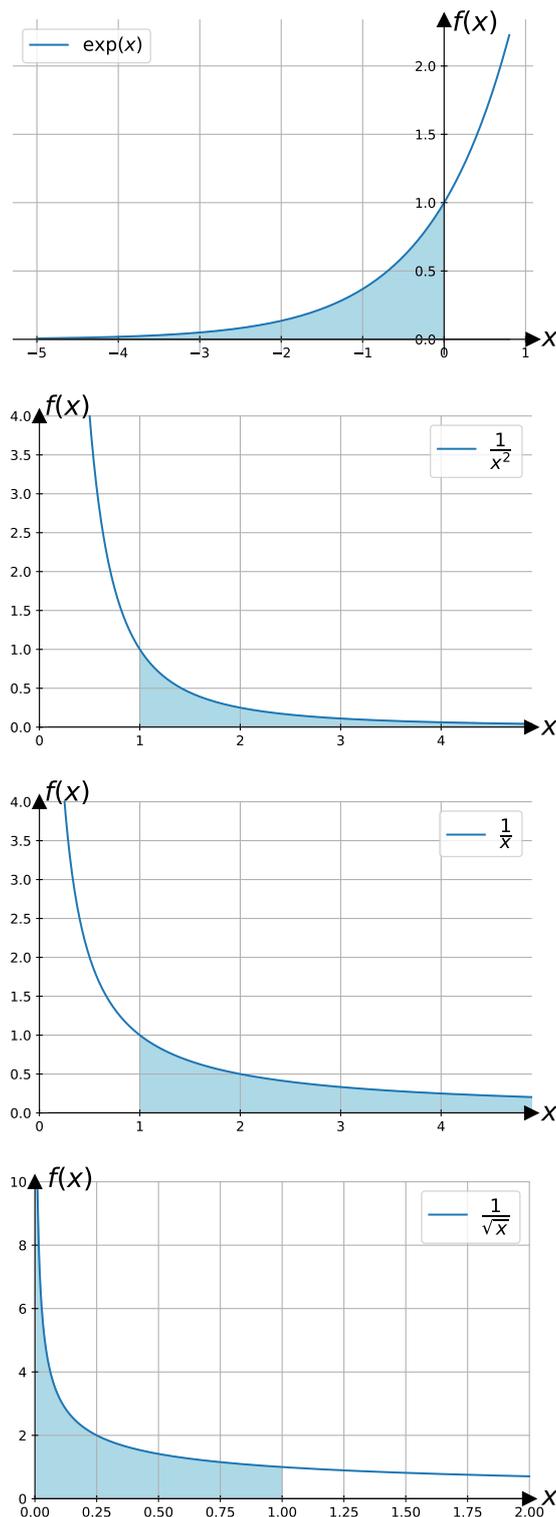


Abbildung 4.4: Uneigentliche Integrale. Uneigentliche Integrale konvergieren über exponentiell abfallende Integranden (oben). Für potenzartig abfallende Integranden $1/x^\alpha$ konvergieren sie für $\alpha > 1$, also z.B. für $1/x^2$ (zweites von oben), aber divergieren für $\alpha \leq 1$, also z.B. für $1/x$ (zweites von unten). Hier darf das Integrationsintervall keine Divergenzen des Integranden enthalten. Reicht das Integrationsintervall an die Divergenz eines potenzartigen Integranden heran, so konvergiert es für $\alpha < 1$, also z.B. für $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (unten).

Partielle Integration

$$\int dx g'(x) f(x) = f(x) g(x) - \int dx g(x) f'(x)$$

Aus der Produktregel der Ableitung folgt durch einfaches Umstellen

$$g'(x) f(x) = [g(x) f(x)]' - g(x) f'(x). \quad (4.15)$$

Integrieren wir beide Seiten dieser Gleichung und verwenden wir den Hauptsatz, so ergibt sich

$$\int dx g'(x) f(x) = \int dx \{ [f(x) g(x)]' - f'(x) g(x) \} = f(x) g(x) - \int dx f'(x) g(x) \quad (4.16)$$

und somit die partielle Integration.

Wir wollen nun einige Integrale betrachten, die mithilfe der partiellen Integration berechnet werden können:

- Integrale über Produkte von Potenzen von x und Exponentialfunktionen, z.B.

$$\int dx x e^x = \int dx x (e^x)' = x e^x - \int dx e^x = x e^x - e^x + C$$

- Integrale über Produkte von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen, z.B.

$$\begin{aligned} \int dx e^x \sin x &= \int dx (e^x)' \sin x = e^x \sin x - \int dx e^x \cos x \\ &= e^x \sin x - \int dx (e^x)' \cos x = e^x (\sin x - \cos x) - \int dx e^x \sin x. \end{aligned}$$

Hier haben wir zunächst zweimal hintereinander partiell integriert. Nun können wir nach dem gesuchten Integral auflösen und erhalten

$$\int dx e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

- Integral über $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \int dx \sin^2 x &= - \int dx \sin x (\cos x)' = - \sin x \cos x + \int dx \cos^2 x \\ &= - \sin x \cos x + \int dx (1 - \sin^2 x) \\ &= - \sin x \cos x + x - \int dx \sin^2 x. \end{aligned}$$

Hier haben wir nach der partiellen Integration den Integranden mit dem trigonometrischen Pythagoras umgeformt. Auflösen nach dem gesuchten Integral gibt

$$\int dx \sin^2 x = \frac{1}{2} [x - \sin x \cos x] + C$$

Dieses Integral kann alternativ mithilfe der trigonometrischen Identität

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int dx \sin^2 x &= \int dx \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int dx \cos 2x \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \underbrace{\sin 2x}_{=2 \sin x \cos x} + C = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

- Ebenso kann das Integral über $\cos^2 x$ berechnet werden (Übungsaufgabe). Allerdings lässt es sich auch direkt auf das Integral über $\sin^2 x$ zurückführen:

$$\begin{aligned} \int dx \cos^2 x &= \int dx(1 - \sin^2 x) = x - \int dx \sin^2 x \\ &= x - \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C \\ &= \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C \end{aligned}$$

- Integrale über Produkte von Potenzen von x und $\ln x$, z.B.

$$\begin{aligned} \int dx \ln x &= \int dx (x)' \ln x = x \ln x - \int dx x \frac{1}{x} = x \ln x - x + C \\ \int dx x \ln x &= \int dx \frac{1}{2}(x^2)' \ln x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int dx x^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

4.5 Substitution

Bei der Methode der *Substitution** wird die Integrationsvariable x in

$$\int_a^b dx f(x) \tag{4.17}$$

durch eine neue Integrationsvariable u ersetzt. Stellen Sie sich die x -Achse als elastisches Band vor, das gedehnt oder gestaucht wird. Nach der Verzerrung ist der Punkt x auf der Achse nun bei $u = u(x)$.⁴ Ebenso können wir x mittels der Umkehrfunktion durch u ausdrücken, $x = x(u)$. Durch die Verzerrung hat sich die Fläche unter dem Graphen verändert, da die Breite der Rechtecke in der Riemann-Summe gedehnt oder gestaucht wird auf

$$du = u(x + dx) - u(x) = u'(x)dx. \tag{4.18}$$

Daher ist

$$\int_a^b dx f(x) \neq \int_{u(a)}^{u(b)} du f(x(u)). \tag{4.19}$$

Wir können aber auch die ursprüngliche Breite dx der Rechtecke durch die neue Integrationsvariable u ausdrücken:

$$dx = x(u + du) - x(u) = x'(u)du. \tag{4.20}$$

Damit können wir Integrale also folgendermaßen umformen:

⁴Der Funktionsgraph wird dabei entsprechend verzerrt, so dass der Wert $y = f(x)$ jetzt bei $u = u(x)$ angenommen wird.

Integration durch Substitution

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} du x'(u) f(x(u)). \quad (4.21)$$

Entsprechend gilt für unbestimmte Integrale

$$\int dx f(x) = \int^{u(x)} du x'(u) f(x(u)). \quad (4.22)$$

Die Integration durch Substitution wird in Abb. 4.5 illustriert. Alternativ und formaler lässt sich die Substitution aus der Kettenregel ableiten. Wir werden dies im Anschluss an einige Beispiele nachholen.

Wir wenden die Substitution zunächst auf das Integral

$$\int_0^{\pi/2} dx \sin(2x) \quad (4.23)$$

an. Hier bietet es sich an, die neue Variable $u = 2x$ einzuführen. Wir dehnen also die x -Achse homogen um einen Faktor 2. Dann ist $du = 2dx$ bzw. $dx = \frac{1}{2}du$. Durch die Dehnung der x -Achse um den Faktor 2 ist die ursprüngliche Breite der Rechtecke gerade halb so groß wie nach der Verzerrung. Die Integralgrenzen ändern sich aufgrund der Verzerrung um einen Faktor 2. Damit erhalten wir

$$\int_0^{\pi/2} dx \sin(2x) = \int_0^{\pi} du \frac{1}{2} \sin(u) = \frac{1}{2} [-\cos(\pi) + \cos(0)] = \frac{1}{2} [-(-1) + 1] = 1. \quad (4.24)$$

Durch die Substitution wird hier also das Integral auf ein Standardintegral zurückgeführt.

Der Zusammenhang zwischen neuer und alter Variable kann auch nichtlinear sein. Dies ist beispielsweise bei diesem Integral hilfreich:

$$\int_0^1 dx x \cos(x^2 + 1). \quad (4.25)$$

Hier ist es sinnvoll, die neue Variable $u = x^2 + 1$ einzuführen. Dann gilt $du = 2xdx$ und wir bemerken, dass der Vorfaktor des Kosinus im Integranden bis auf einen Zahlenfaktor gerade durch du ersetzt werden kann:

$$\int_0^1 dx x \cos(x^2 + 1) = \int_1^2 du \frac{1}{2x} x \cos u = \frac{1}{2} \int_1^2 du \cos u = \frac{1}{2} [\sin 2 - \sin 1] \quad (4.26)$$

Ganz ähnlich kann man das Integral über den Tangens berechnen, denn

$$\int dx \tan x = \int dx \frac{\sin x}{\cos x}. \quad (4.27)$$

Wir bemerken, dass der Zähler im wesentlichen die Ableitung des Nenners ist. Wir versuchen also die Substitution $u = \cos x$, so dass $du = -\sin x dx$. Damit erhalten wir für das unbestimmte Integral

$$\int dx \tan x = - \int du \frac{1}{u} = -\ln u + C = -\ln(\cos x) + C. \quad (4.28)$$

Dies können wir auf die Regel

$$\int dx \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln(g(x)) + C \quad (4.29)$$

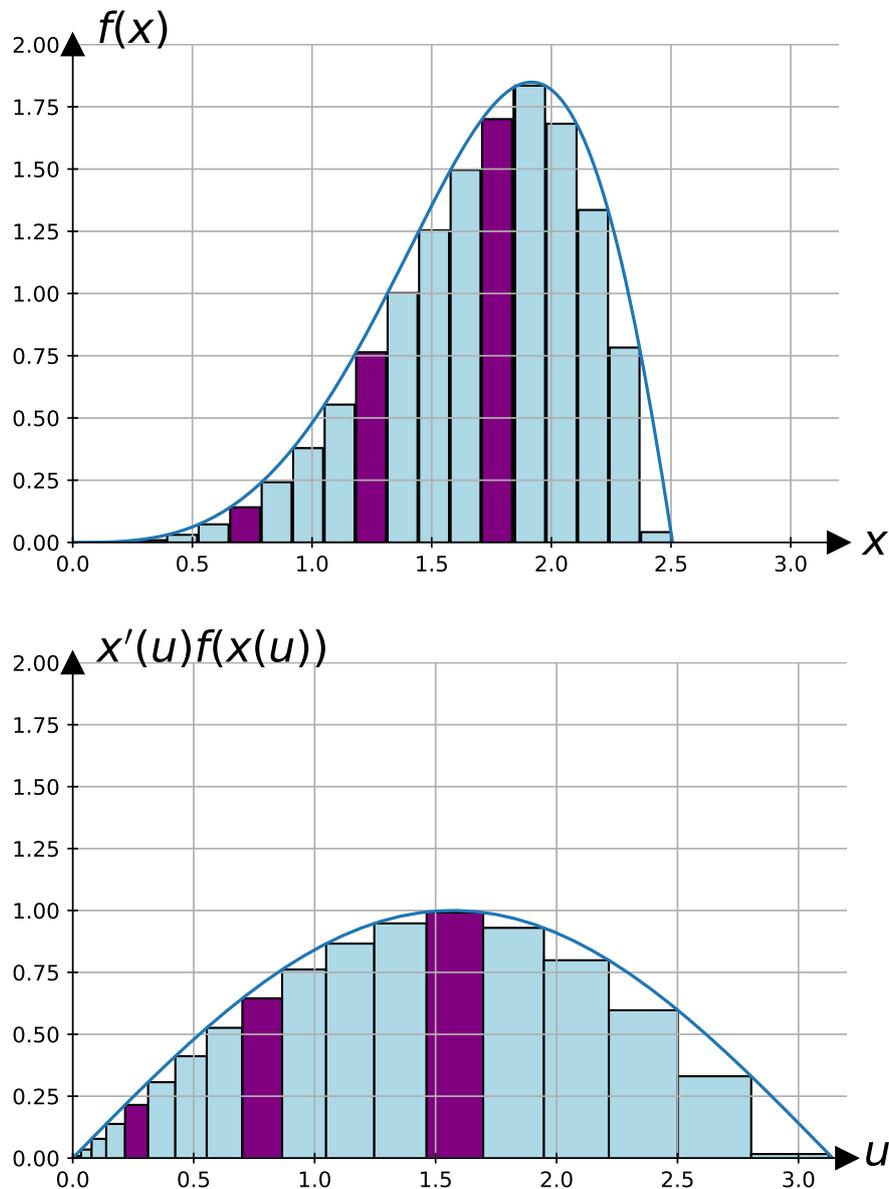


Abbildung 4.5: Illustration der Substitutionsregel am Beispiel des Integrals über $f(x) = x \sin(x^2/2)$ und der Substitution $u = x^2/2$. Die Substitution entspricht einer Verzerrung der x -Achse, wodurch die Breite der Rechtecke in der Riemann-Summe gedehnt bzw. gestaucht wird. Entsprechend muss der Integrand um den Faktor $x'(u)$ skaliert werden, damit die Fläche der Rechtecke unverändert bleibt. Oben: Riemann-Summe für das Integral $\int_0^{\sqrt{2\pi}} dx x \sin(x^2/2)$ mit Stützstellen x_i . Unten: Riemann-Summe für das aus der Substitution resultierende Integral $\int_0^{\pi} du \sin u$ mit Stützstellen $u_i = u(x_i)$. Korrespondierende Rechtecke (z.B. die farblich hervorgehobenen) haben in beiden Abbildungen (bis zur linearen Ordnung in Δx) gleiche Flächeninhalte.

verallgemeinern.

Auch in dem Integral

$$\int dx \frac{\ln(x)}{x}. \quad (4.30)$$

können wir einen Faktor mit der Ableitung einer geeigneten Integrationsvariable identifizieren, nämlich $u = \ln x$. Dann ist $du = \frac{1}{x} dx$ und wir erhalten

$$\int dx \frac{\ln x}{x} = \int du u = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C. \quad (4.31)$$

Dieses Integral kann alternativ mittels partieller Integration berechnet werden:

$$\int dx \frac{\ln x}{x} = \int dx (\ln x)' \ln x = \ln^2 x - \int dx \ln x (\ln x)'. \quad (4.32)$$

Auflösen nach dem gesuchten Integral reproduziert das Resultat der Substitutionsmethode.

Als letztes Beispiel betrachten wir das Integral

$$\int dx \frac{1}{\cosh x} = 2 \int dx \frac{1}{e^x + e^{-x}} \quad (4.33)$$

Wir führen $u = e^x$ als neue Integrationsvariable ein, so dass $du = e^x dx$ bzw. $dx = \frac{du}{u}$. Damit reduziert sich das Integral auf ein Standardintegral und wir erhalten

$$\int dx \frac{1}{\cosh x} = 2 \int \frac{du}{u} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} = \int du \frac{1}{u^2 + 1} = 2 \arctan u + C = 2 \arctan(e^x) + C. \quad (4.34)$$

Zum Beispiel erhalten wir für das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{\cosh(x)} = 2[\arctan(e^x)]_0^\infty = 2 \arctan(\infty) - 2 \arctan(1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.35)$$

Abschließend wollen wir den Zusammenhang von Substitution und Kettenregel diskutieren. Wenn $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist, erhalten wir mittels Kettenregel

$$[F(x(u))] = F'(x(u)) \cdot x'(u)$$

Integrieren wir beide Seiten über u von $u(a)$ nach $u(b)$, erhalten wir

$$\int_{u(a)}^{u(b)} du [F(x(u))] = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(x(u)) \cdot x'(u)$$

und unter Ausnutzen des Hauptsatzes

$$F(b) - F(a) = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(x(u)) \cdot x'(u)$$

bzw.

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{u(a)}^{u(b)} du f(x(u)) \cdot x'(u).$$

Dies entspricht gerade der Substitutionsformel (4.21).

4.6 Partialbruchzerlegung

Integrale über gebrochenrationale Funktionen können mittels *Partialbruchzerlegung*** berechnet werden. Hierbei treten je nach Anzahl der Nullstellen des Nenners verschiedene Fälle auf. Diese werden durch die folgenden Beispiele illustriert.

Wir beginnen mit dem Integral

$$\int dx \frac{x+3}{x^2-4x-5}. \quad (4.36)$$

Berechnen wir die Nullstellen des Nenners, so können wir das Integral zu

$$\int dx \frac{x+3}{x^2-4x-5} = \int dx \frac{x+3}{(x-5)(x+1)} \quad (4.37)$$

umformen. Wir zerlegen nun den Integranden in eine Summe zweier Partialbrüche:

$$\frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-5)}{(x-5)(x+1)} \stackrel{!}{=} \frac{x+3}{(x-5)(x+1)} \quad (4.38)$$

mit zu bestimmenden Zählern A und B . Diese erfüllen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - 5B &= 3, \end{aligned}$$

welches durch

$$A = \frac{4}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

gelöst wird. Einsetzen in das Integral führt nun auf elementare Integrationen und wir finden das Resultat

$$\int dx \frac{x+3}{(x-5)(x+1)} = \int dx \left[\frac{3}{4(x-5)} - \frac{1}{3(x+1)} \right] = \frac{3}{4} \ln(x-5) - \frac{1}{3} \ln(x+1) + C. \quad (4.39)$$

Analog können wir das Integral

$$\int dx \frac{1}{x^2-a^2} = \int dx \frac{1}{(x-a)(x+a)} \quad (4.40)$$

berechnen. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{A(x+a) + B(x-a)}{x^2-a^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{x^2-a^2} \quad (4.41)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (A+B)x &= 0 \\ (A-B)a &= 1 \end{aligned}$$

mit Lösung

$$A = -B = \frac{1}{2a}.$$

Für das Integral erhalten wir nun

$$\int dx \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \int dx \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} [\ln(x-a) - \ln(x+a)] = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right). \quad (4.42)$$

In den bisherigen Beispielen enthielten die Zähler Polynome niedrigeren Grades als die Nenner. Im umgekehrten Fall müssen wir der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision vorschalten. Der Integrand von

$$\int dx \frac{x^4}{x^2 - a^2} \quad (4.43)$$

kann mittels Polynomdivision in eine Summe aus Polynom und gebrochenrationaler Funktion (mit Polynom niedrigeren Grades im Zähler) umgeschrieben werden:

$$\begin{array}{r} (x^4) : (x^2 - a^2) = x^2 + a^2 + \frac{a^4}{x^2 - a^2} \\ -x^4 + a^2x^2 \\ \hline a^2x^2 \\ -a^2x^2 + a^4 \\ \hline a^4 \end{array}$$

Nun können wir wieder die Partialbruchzerlegung wie in den vorigen Beispielen durchführen, um das Integral zu lösen:

$$\int dx \frac{x^4}{x^2 - a^2} = \int dx \left[x^2 + a^2 + \frac{a^4}{x^2 - a^2} \right] = \frac{x^3}{3} - a^2x + \frac{a^3}{2} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right). \quad (4.44)$$

Bisher haben wir Beispiele betrachtet, bei denen das Polynom im Nenner entweder bereits faktorisiert war oder leicht faktorisiert werden konnte. Allerdings lässt sich im Reellen nicht jedes Polynom faktorisieren, da ein Polynom n -ten Grades nur maximal n Nullstellen besitzt. Ein Integral, dessen Nenner sich nicht faktorisieren lässt, ist

$$\int dx \frac{bx + c}{x^2 + a^2}. \quad (4.45)$$

Schreiben wir dieses Integral als Summe zweier Integrale,

$$\int dx \frac{bx + c}{x^2 + a^2} = \int dx \frac{bx}{x^2 + a^2} + \int dx \frac{c}{x^2 + a^2}, \quad (4.46)$$

so lassen sich beide Teilintegrale durch einfache Substitutionen auf Standardintegrale zurückführen. Im ersten Integral substituieren wir $u = x^2$ mit $du = 2x dx$ bzw. $x dx = \frac{1}{2} du$ und erhalten so

$$\begin{aligned} \int dx \frac{bx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{2} \int du \frac{b}{u + a^2} \\ &= \frac{b}{2} \int du \frac{1}{u + a^2} \\ &= \frac{b}{2} \ln(u + a^2) \\ &= \frac{b}{2} \ln(x^2 + a^2). \end{aligned}$$

Im zweiten Integral substituieren wir $u = x/a$ mit $dx = a du$:

$$\begin{aligned} \int dx \frac{c}{x^2 + a^2} &= \int du \frac{ac}{(au)^2 + a^2} \\ &= \frac{c}{a} \int du \frac{1}{u^2 + 1} \\ &= \frac{c}{a} \arctan u \\ &= \frac{c}{a} \arctan \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int dx \frac{bx+c}{x^2+a^2} = \frac{b}{2} \ln(x^2+a^2) + \frac{a}{c} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad (4.47)$$

wobei wir die allgemeine Integrationskonstante C wieder explizit angeschrieben haben.

Integrale von diesem Typ treten allgemein als Bestandteil von Integralen über gebrochenrationale Funktionen auf, wenn die Anzahl der (reellen) Nullstellen des Polynoms im Nenner kleiner ist als der Grad des Polynoms. In diesen Fällen verfährt man wie für

$$\int dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}. \quad (4.48)$$

Um dieses Integral zu lösen, zerlegen wir den Integranden wie folgt in Partialbrüche:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Nach einfacher Rechnung findet man

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right]. \quad (4.49)$$

Das resultierende Integral

$$\int dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \int dx \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1} \right]$$

kann nun mithilfe des vorigen Beispiels berechnet werden:

$$\int dx \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad (4.50)$$

Schließlich können Nullstellen in gebrochenrationalen Funktionen mehrfach auftreten. Dies ist beispielsweise für den Integranden in

$$\int dx \frac{1}{(x-3)(x-1)^2} \quad (4.51)$$

der Fall. Die Partialbruchzerlegung muss dann nicht nur $(x-1)^{-1}$ oder $(x-1)^{-2}$ enthalten, sondern beide Brüche:

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Bestimmt man die Koeffizienten A, B und C , so findet man

$$\frac{1}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{4} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Alle Teilintegrale sind elementar integrierbar und wir finden schließlich

$$\int dx \frac{1}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{1}{4} \ln(x-3) - \frac{1}{4} \ln(x-1) + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + C.$$

Kombinieren wir Partialbruchzerlegung mit Substitution, so können auch weitere Typen von Integralen berechnet werden, jenseits der gebrochenrationalen Funktionen. Ein solches Beispiel ist

$$\int dx \frac{1}{e^x+1}. \quad (4.52)$$

Der Integrand ist die sogenannte Fermi-Verteilung, die in der statistischen Physik eine wichtige Rolle spielt. Durch die Substitution $y = e^x$ wird das Integral zu

$$\int dy \frac{1}{y(y+1)}. \quad (4.53)$$

Dies ist ein Integral über eine gebrochenrationale Funktion, das mittels Partialbruchzerlegung berechnet werden kann. Die Zerlegung

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{A(y+1) + By}{y(y+1)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{y(y+1)} \quad (4.54)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

mit Lösung

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Somit erhalten wir

$$\int dy \frac{1}{y(y+1)} = \int dy \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right] = \ln(y) - \ln(y+1) + C = \ln\left(\frac{y}{y+1}\right) + C$$

Machen wir schließlich die Substitution rückgängig so erhalten wir das Resultat

$$\int dx \frac{1}{e^x + 1} = \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-x}}\right) + C. \quad (4.55)$$

Dieses Beispiel verallgemeinert offenbar auf beliebige gebrochenrationale Funktionen von e^x . Insbesondere können mit dieser Methode auch Integrale über gebrochenrationale Funktionen von $\sinh x$ und $\cosh x$ berechnet werden.

4.7 Weierstraß-Substitution

Eine weitere Substitution – die sogenannte *Weierstraß-Substitution*^{***} – erlaubt die Berechnung von Integralen wie

$$\int dx \frac{1}{2 + \cos x} \quad \text{and} \quad \int dx \frac{1}{\sin x} \quad (4.56)$$

über gebrochenrationale Funktion von $\sin x$ oder $\cos x$. Die Methode beruht auf der Substitution

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad (4.57)$$

mit

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \quad (4.58)$$

Sinus und Kosinus werden durch diese Substitution zu

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad (4.59)$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (4.60)$$

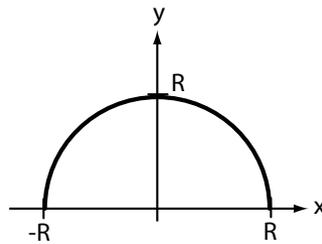


Abbildung 4.6: Funktionsgraph $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ zur Berechnung der Kreisfläche.

Die Weierstraß-Substitution führt nach den letzten beiden Gleichungen auf einen gebrochenrationalen Integranden, so dass das resultierende Integral systematisch mittels Partialbruchzerlegung gelöst werden kann.

Als illustrierendes Beispiel betrachten wir

$$\int dx \frac{1}{2 + \cos x} = \int dt \frac{2}{1+t^2} \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int dt \frac{2}{2+2t^2+1-t^2} = \int dt \frac{2}{t^2+3}.$$

Das aus der Substitution resultierende Integral über eine gebrochenrationale Funktion kann nun mittels Partialbruchzerlegung gelöst werden [s. Glg. (4.47)] und wir finden das Ergebnis

$$\int dx \frac{1}{2 + \cos x} = \int dt \frac{2}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C. \quad (4.61)$$

4.8 Geometrische Anwendungen der Integralrechnung

Mittels Integralrechnung können wir Umfänge, Flächen und Volumina geometrischer Gebilde berechnen. Wir beginnen mit der Fläche eines Kreises mit Radius R . Die Punkte auf dem Kreis erfüllen die Gleichung (Pythagoras)

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (4.62)$$

so dass

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (4.63)$$

Der Flächeninhalt A des Kreises ist die doppelte Fläche unter dem Funktionsgraphen $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ des oberen Halbkreises (s. Abb. 4.6),

$$A = 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (4.64)$$

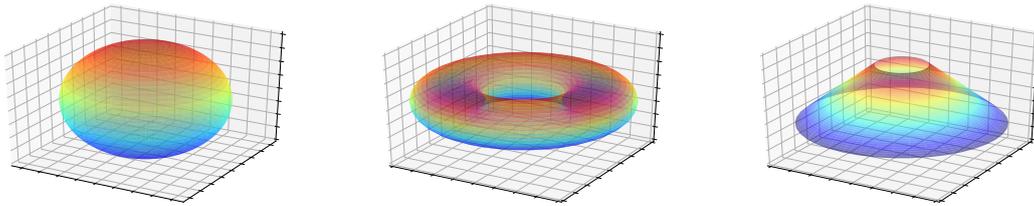


Abbildung 4.7: Beispiele für Rotationskörper.

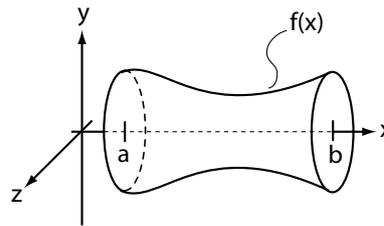
Wir berechnen dieses Integral mit der Substitution $x = R \sin \phi$, $dx = R \cos \phi$. Unter Ausnutzen des trigonometrischen Pythagoras ergibt sich dann⁵

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi R \cos \phi \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \phi} = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos \phi \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \\ &= 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi = 2R^2 \left[\frac{1}{2}(\phi + \sin \phi \cos \phi) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R^2 \end{aligned}$$

und somit die bekannte Kreisfläche von $A = \pi R^2$.

Rotationskörper

*Rotationskörper*** entstehen, wenn ein Funktionsgraph $f(x)$ um die x -Achse rotiert wird.



Beispiele für Rotationskörper sind in Abb. 4.7 gezeigt.

Das Volumen eines solchen Rotationskörpers kann berechnet werden, indem man ihn sich als aus Kreisscheiben der Dicke Δx zusammengesetzt denkt (s. Abb. 4.8) und die Dicke der Scheiben gegen Null gehen lässt. Die Kreisscheiben haben das Volumen

$$\Delta x \pi [f(x)]^2. \quad (4.65)$$

Das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich dann zu

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta x \pi [f(x)]^2 = \int_a^b dx \pi [f(x)]^2 \quad (4.66)$$

Wir illustrieren diese Formel, indem wir das Volumen einer Kugel mit Radius R berechnen. Eine Kugel entsteht, wenn ein Halbkreis um die x -Achse rotiert wird. Das Volumen der Kugel ergibt

⁵Das hier auftretende Integral $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi$ kann alternativ auch folgendermaßen berechnet werden. Aufgrund der Periodizität von Sinus und Kosinus ist $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sin^2 \phi$. Wir finden demnach mit dem trigonometrischen Pythagoras, dass

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \cos^2 \phi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \sin^2 \phi \right\} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

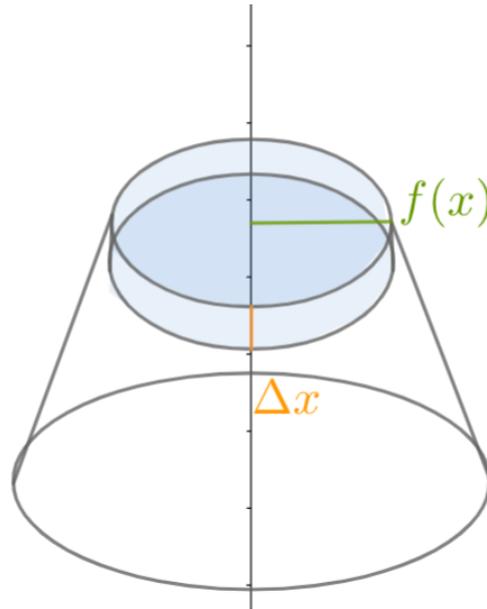


Abbildung 4.8: Volumen des Rotationskörpers. Kreisseiben mit Radius $f(x)$ und Dicke Δx werden aufsummiert. In dem hier dargestellten Fall ist $f(x)$ eine lineare Funktion.

sich dann aus

$$V = \int_{-R}^R dx \pi \left[\sqrt{R^2 - x^2} \right]^2 = \int_{-R}^R dx \pi (R^2 - x^2) = \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R = 2\pi R^3 - \frac{2\pi}{3} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (4.67)$$

Aus dem Kugelvolumen $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ergibt sich das Volumen einer dünnen Kugelschale mit Radius R und Dicke $\Delta R \ll R$ zu

$$V(R + \Delta R) - V(R) = \frac{4}{3} \pi [(R + \Delta R)^3 - R^3] \simeq 4\pi R^2 \Delta R. \quad (4.68)$$

Da das Volumen einer dünnen Kugelschale andererseits gleich dem Produkt aus Kugeloberfläche A und Dicke ΔR ist, gewinnen wir auf diese Weise auch das Resultat

$$A = 4\pi R^2 \quad (4.69)$$

für die Oberfläche einer Kugel.

Schließlich wollen wir einen Ausdruck für die Länge eines Funktionsgraphen $y = f(x)$ angeben. Wir approximieren die Kurve durch kurze Sekantenstücke der Länge (s. Abb. 4.9)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (4.70)$$

Die Länge der Kurve kann dann durch die Summe der Längen der Sekanten genähert werden,

$$L \simeq \sum ds = \sum \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sum dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (4.71)$$

Im Limes unendlich vieler Sekantenstücke wird dieser Ausdruck exakt und geht in ein Integral über. Wir erhalten demnach:

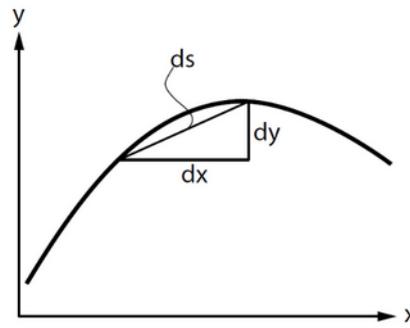


Abbildung 4.9: Sekante zur Berechnung der Länge eines Funktionsgraphen $y = f(x)$. Die Länge der Kurve kann durch die Summe der Längen ds der Sekanten genähert werden. Im Limes unendlich vieler Sekanten wird dieser Ausdruck exakt.

Länge einer Kurve

Die Länge einer Kurve $y = f(x)$ ist gegeben durch

$$L = \int dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}, \quad (4.72)$$

wobei die Integralgrenzen durch die x -Koordinaten des Anfangs- und Endpunkts gegeben werden.

Mithilfe dieses Ausdrucks lässt sich der Umfang eines Kreises aus dem Ausdruck

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (4.73)$$

für den Halbkreis berechnen. Mit

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (4.74)$$

erhalten wir

$$U = 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{1 + f'(x)^2} = 2 \int_{-R}^R dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = 2 \int_{-R}^R dx \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}. \quad (4.75)$$

Die Substitution $x = Ru$ mit $dx = Rdu$ führt auf

$$U = 2R \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} = 2R [\arcsin u]_{-1}^1 = 2R \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2\pi R. \quad (4.76)$$

Alternativ hätten wir dieses bekannte Resultat – analog zur Kugeloberfläche – aus der Kreisfläche erhalten können, indem wir eine dünne Kreisscheibe mit Radius R und Dicke $\Delta R \ll R$ betrachten. Deren Fläche beträgt

$$A(R + \Delta R) - A(R) = \pi[(R + \Delta R)^2 - R^2] \simeq 2\pi R \Delta R.$$

Andererseits ist die Fläche der dünnen Kreisscheibe das Produkt von Kreisumfang U und Dicke ΔR . Hieraus folgt wieder $U = 2\pi R$.⁶

⁶Dieses Argument erklärt auch, warum der Kreisumfang $U = 2\pi R$ die Ableitung der Kreisfläche $A = \pi R^2$ nach dem

4.9 Aufgaben

Aufgabe 4.1 Bestimmte Integrale

Berechnen Sie:

- $\int_0^{\pi/2} dx \sin x$
- $\int_0^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2}$
- $\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\int_0^{\pi/2} dx \frac{1}{\cos^2 x}$ (Erklären Sie Ihr Ergebnis.)

Aufgabe 4.2 Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale über die folgenden Integranden mittels partieller Integration:

- $x \sin x$
- $x^2 \sin x$
- $x^2 e^x$
- $x^n e^x$ (n ist eine natürliche Zahl)
- $e^x \cos x$
- $\frac{\ln x}{x}$
- $\frac{\ln x}{x^n}$ (n ist eine natürliche Zahl)
- $e^x \sin^2 x$
- $x \arctan x$
- $x^n \ln x$ (n ist eine natürliche Zahl)
- $\ln \sqrt{x}$

Radius ist. Im Limes kleiner ΔR gilt

$$U(R)\Delta R = A(R + \Delta R) - A(R)$$

und somit

$$U(R) = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{A(R + \Delta R) - A(R)}{\Delta R} = A'(R).$$

Entsprechend überzeugt man sich, dass es kein Zufall ist, dass die Kugeloberfläche $A = 4\pi R^2$ die Ableitung des Kugelvolumens $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ nach R ist.

- $\frac{2x}{e^x}$
- $\ln^2 x$
- $\ln^3 x$
- $\frac{\ln^2 x}{x^2}$
- $\sin x \ln(\cos x)$
- $x \sin x \cos x$
- $\frac{1}{x \ln^3 x}$

Aufgabe 4.3 Ableitung

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_{\ln x}^{x^2} dt \sin(\cos t)$$

Aufgabe 4.4 Riemann-Summe I

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 dx x^2$ direkt mittels der Riemann-Summe. Benutzen Sie die Formel

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für die Summe der ersten n Quadratzahlen. (Sie können diese Formel z.B. mit vollständiger Induktion beweisen oder direkt herleiten, indem Sie die Summe

$$\sum_{j=1}^n [(n+1)^3 - n^3]$$

betrachten.)

Aufgabe 4.5 Riemann-Summe II

Berechnen Sie die Summe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k},$$

indem Sie die Summe als Riemann-Summe interpretieren.

Aufgabe 4.6 Vermischte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

- $\int_{-3}^3 dx \frac{x}{2 + \sin^2 x}$

$$\bullet \int_{-1}^0 dx \frac{x^2}{2+x^4} - \int_0^1 dx \frac{x^2}{2+x^4}$$

Aufgabe 4.7 Stammfunktionen

Wie lauten die Stammfunktionen zu

- $ax + b$
- $\frac{1}{ax + b}$
- $\frac{1}{x^5}$
- $\sin 3x$

Aufgabe 4.8 Substitution

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Substitution) von

- $\frac{x^2}{x^3 + 1}$
- $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$
- $e^{\cos x} \sin x$
- $\frac{1}{\sinh x}$ (Substitution mit anschließender Partialbruchzerlegung)
- $\tanh x$
- $\frac{1}{\sin x}$
- $\frac{\ln^\alpha x}{x}$ ($\alpha \neq -1$)
- $\ln^2 x$

Aufgabe 4.9 Fläche

Berechnen Sie die zwischen den Funktionsgraphen von $f(x) = \sin(\pi x)$ und $g(x) = x(1-x)$ eingeschlossene Fläche.

Aufgabe 4.10 Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Partialbruchzerlegung) über

- $\frac{x^2}{x^2 - a^2}$
- $\frac{x+7}{x^2 - 3x + 2}$
- $\frac{1}{e^x - 1}$

Aufgabe 4.11 Länge einer Parabel

Berechnen Sie die Länge des Funktionsgraphen der Parabel $f(x) = 1 - x^2$ zwischen den beiden Nullstellen.

Aufgabe 4.12 Flächen und Volumina

- Berechnen Sie die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Ellipse um die x -Achse erzeugt wird.
- Berechnen Sie das Volumen eines Kreiskegels, der Höhe h und Radius r (in der Grundfläche) hat.

Aufgabe 4.13 Vermischte unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale über

- $\arctan x$
- $\frac{1}{\sqrt{x+x}}$
- $\frac{x}{2^x}$
- $e^{\sqrt{x}}$
- $\sqrt{3+2x-x^2}$

Aufgabe 4.14 Uneigentliche Integrale

Sind die folgenden Integrale endlich:

- $\int_0^{\infty} dx \frac{1}{1+x^3}$
- $\int_{-1}^0 dx \frac{1}{1+x^3}$
- $\int_1^{\infty} dx \frac{e^{-1/x}}{x^2}$

5. Mehr zur Differential- und Integralrechnung

Dieses Kapitel diskutiert Ergänzungen zur Differential- und Integralrechnung, die über den üblichen Schulstoff hinausgehen. Insbesondere wollen wir uns mit der *Taylor-Reihe*** beschäftigen, die von Beginn an ein unerlässliches Werkzeug ist und auch in den Anfangsvorlesungen der Physik immer wieder auftritt. Die Taylor-Reihe ist unter anderem die Grundlage der bekannten Regel von l'Hospital. Weiterhin wollen wir uns etwas genauer mit den Hyperbelfunktionen (und ihren Umkehrfunktionen) beschäftigen, die wir bereits im Rahmen der Aufgabe 3.15 eingeführt hatten. Auch die Taylor-Reihe weist darauf hin, dass diese Funktionen eng mit den trigonometrischen Funktionen verwandt sind. (Ein weitergehendes Verständnis kann dann im Rahmen der komplexen Zahlen gewonnen werden, s. Kap. 7.)

5.1 Taylor-Reihe

Die Taylor-Reihe ist die Antwort auf die Frage, wie man eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines Punktes x_0 möglichst gut durch ein Polynom N -ten Grades nähern kann. Je besser die Näherung ist, desto eher erwarten wir, dass nicht nur der Funktionswert am Ort x_0 , sondern auch die Ableitungen der Funktion an der Stelle x_0 mit den entsprechenden Größen des Näherungspolynoms übereinstimmen. Wir werden also versuchen, ein Polynom zu finden, dessen Ableitungen am Ort x_0 mit möglichst vielen Ableitungen der Funktion übereinstimmen.

Im einfachsten Fall können wir die Funktion in der Umgebung von x_0 durch ihre Tangente nähern,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Dies ist ein Polynom ersten Grades. Bei dieser Näherung stimmen am Ort x_0 der Funktionswert sowie die erste Ableitung (Steigung) für Funktion und Näherungspolynom überein. Für die höheren Ableitungen stimmt das nicht mehr, da diese für die Tangente ausnahmslos identisch verschwinden.

Die Näherung wird besser, wenn sie auch noch die Krümmung der Funktion an der Stelle x_0 beschreibt. Dies können wir erreichen, indem wir die Funktion in der Nähe von x_0 durch eine

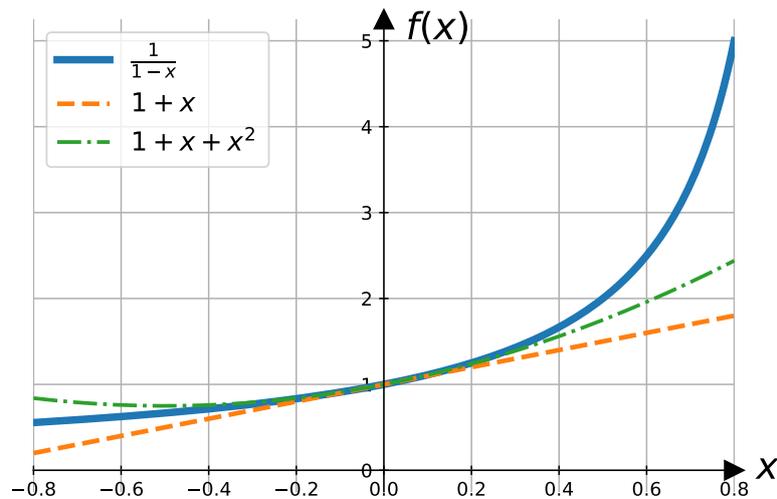


Abbildung 5.1: Die Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ (blau) und die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ zur linearen Ordnung $f(x) \simeq 1+x$ (orange gestrichelt) und zur quadratischen Ordnung $f(x) \simeq 1+x+x^2$ (grün gestrichelt).

Parabel, also einem Polynom 2. Grades, nähern. Das Näherungspolynom

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2. \quad (5.1)$$

auf der rechten Seite stimmt nun in Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen am Ort x_0 mit Funktionswert und den ersten beiden Ableitungen von $f(x)$ überein.

Übung: Berechnen Sie den Funktionswert und die ersten beiden Ableitungen des Näherungspolynoms in Glg. (5.1) für $x = x_0$ und überzeugen Sie sich davon, dass diese mit den entsprechenden Größen der Funktion $f(x)$ übereinstimmen.

Dies ist in Abb. 5.1 für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

illustriert. Die Tangente am Punkt $x_0 = 0$ ist $p_1(x) = 1+x$. Das Näherungspolynom zweiten Grades ist $p_2(x) = 1+x+x^2$. Wir sehen, dass $p_2(x)$ die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 tatsächlich genauer approximiert als die Tangente $p_1(x)$.

So motiviert fahren wir fort und suchen Polynome $p_N(x)$ höheren Grades, für die die Funktion $f(x)$ und das Polynom $p_N(x)$ auch in höheren Ableitungen am Punkt x_0 übereinstimmen. Dies führt im Limes, dass die Ordnung N des Polynoms gegen Unendlich geht, auf die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j. \quad (5.2)$$

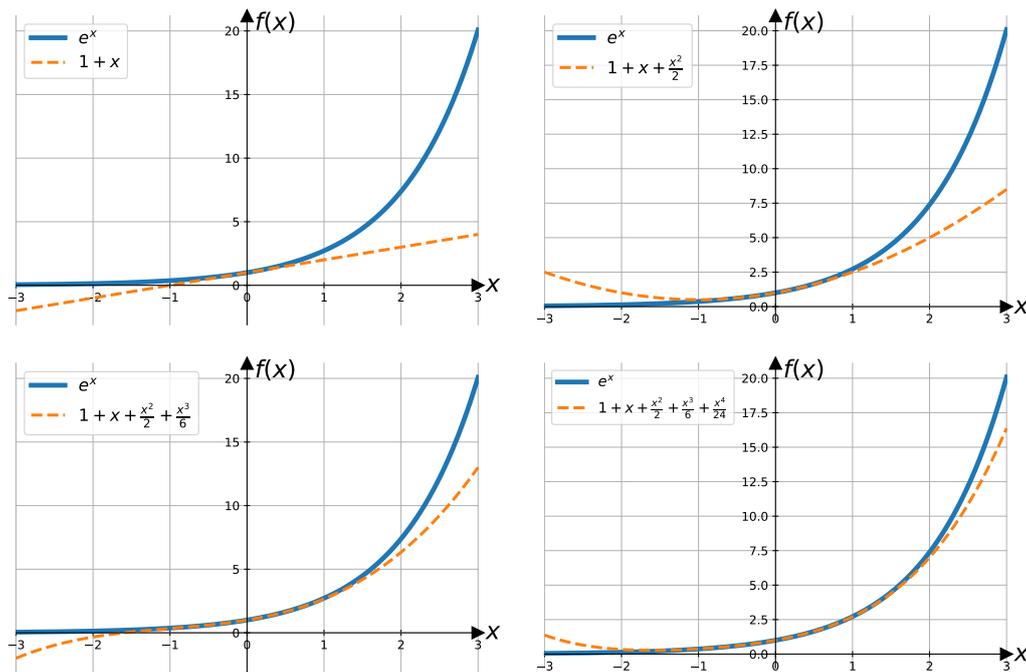


Abbildung 5.2: Taylornäherung wird besser mit höherer Ordnung. Hier, die Taylor-Reihe 1. - 4. Ordnung für die Exponentialfunktion.

Denn berechnen wir die n -te Ableitung der Taylor-Reihe am Ort x_0 , so finden wir

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x-x_0)^j \\
 &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \frac{d^n}{dx^n} (x-x_0)^j \\
 &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) j(j-1)\dots(j-n+1) (x-x_0)^{j-n} \\
 &= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) \frac{j!}{(j-n)!} (x-x_0)^{j-n} \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x_0).
 \end{aligned}$$

Im Limes $N \rightarrow \infty$ hat man es nicht mehr mit einem Polynom zu tun. Man spricht in diesem Fall von einer *Potenzreihe*^{**}, daher der Begriff Taylor-Reihe.

Wir haben bereits an einem Beispiel gesehen, dass die ersten Terme der Taylor-Reihe eine gute Näherung an die Funktion in der Umgebung von x_0 darstellt. Typischerweise wird diese Näherung umso besser, je höher der Grad N des Näherungspolynoms, siehe Abb. 5.2. Im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ kann die Taylor-Reihe aber auch über einen endlichen Bereich oder sogar die gesamte reelle Achse mit der ursprünglichen Funktion zusammenfallen. Das Konvergenzverhalten der Taylor-Reihe kann erst im Rahmen der Funktionentheorie (Analysis komplexwertiger Funktionen) genauer verstanden werden. Allerdings kann man einiges Verständnis entwickeln, indem man konkrete Beispiele untersucht.

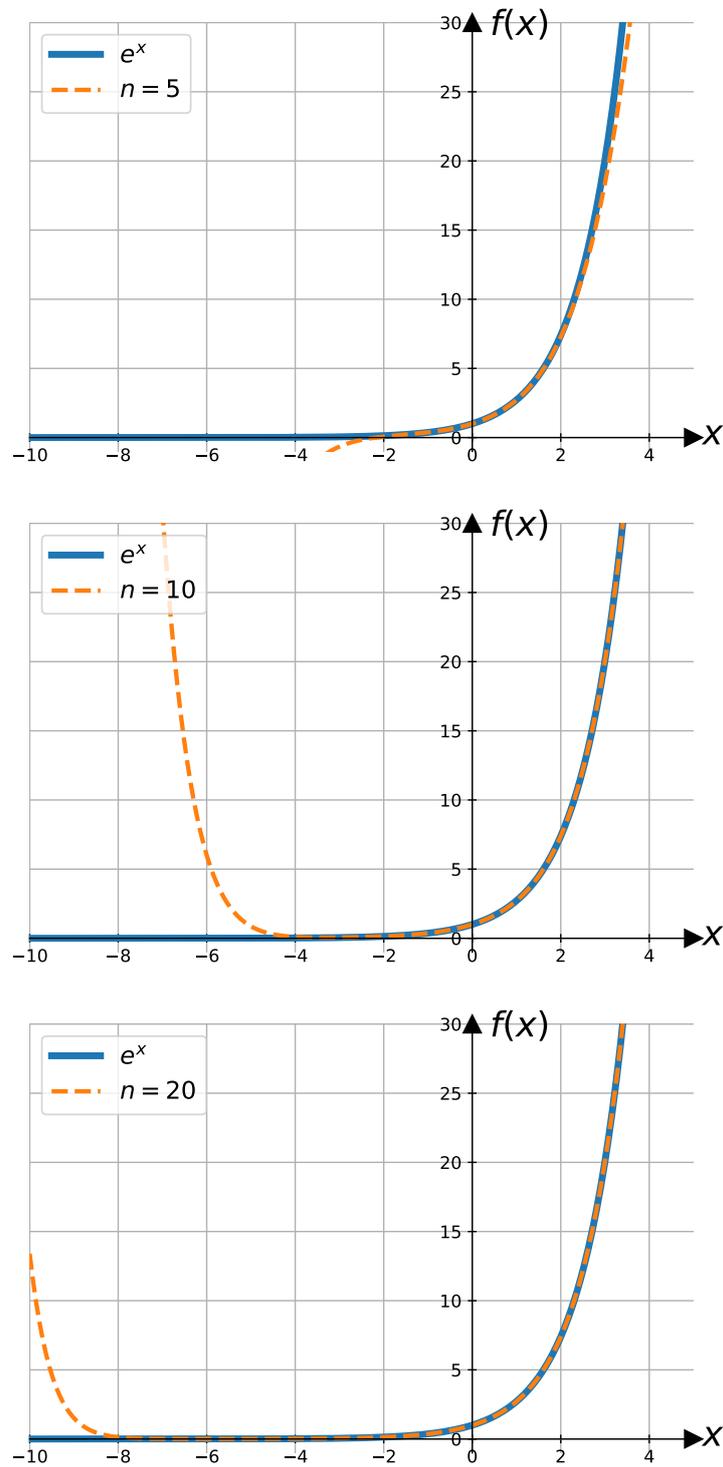


Abbildung 5.3: Aus der Taylor-Reihe gewonnene Näherungspolynome (orange gestrichelt) für die Exponentialfunktion (blau). Mit steigendem Grad n des Näherungspolynoms wird die Konvergenz besser.

5.2 Beispiele für Taylor-Reihen

Wir beginnen mit der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ um $x = 0$. In diesem Fall sind alle Ableitungen $f^{(j)}(x) = e^x$ und somit $f^{(j)}(0) = 1$. Wir erhalten also aus Glg. (5.2) die Taylor-Reihe

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (5.3)$$

Wir illustrieren in Abb. 5.2, wie eine nach dem x^n -Term abgebrochene Taylor-Reihe (also ein Polynom n -ten Grades) die Exponentialfunktion approximiert. Man sieht, wie die Exponentialfunktion mit zunehmendem n über immer größere Bereiche gut approximiert wird. Es stellt sich in diesem Fall heraus, dass die vollständige Taylor-Reihe (5.2) die Exponentialfunktion über die gesamte reelle Achse exakt reproduziert.

Wir bemerken noch, dass die Taylor-Reihe (5.3) der Exponentialfunktion für $x = 1$ auf die Formel

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$$

führt, die wir bereits in Kap. 2 in Glg. (2.61) kennengelernt hatten.

Auch die höheren Ableitungen von Sinus und Kosinus sind leicht zu berechnen, da sich die Funktionen nach vier Ableitungen reproduzieren:

$$\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \dots$$

Beginnend mit $\sin x$ ist hier jede Funktion die Ableitung der vorherigen Funktion. Nach vier Ableitungen führt dies auf $\sin x$ zurück. Wir finden demnach, dass bei $x = 0$ alle geraden Ableitungen des Sinus verschwinden und die ungeraden Ableitungen zwischen 1 und -1 alternieren. Hieraus ergibt sich für die Taylor-Reihe des Sinus um $x_0 = 0$ zu

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (5.4)$$

Ebenso findet man für den Kosinus die Taylor-Reihe

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (5.5)$$

Es ist noch interessant zu beobachten, dass sich die Taylor-Reihe des Kosinus durch termweise Ableitung aus der Taylor-Reihe des Sinus ergibt, in Übereinstimmung mit der Identität $\cos x = (\sin x)'$.¹ Auch die Taylor-Reihen für Sinus und Kosinus reproduzieren die Funktionen auf der gesamten reellen Achse.

Wir betrachten nun die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (5.6)$$

um $x_0 = 0$. Der Funktionswert für $x_0 = 0$ beträgt $f(0) = 0$ und die erste Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Berechnet man alle höheren Ableitungen und wertet sie bei $x = 0$ aus, so findet man die Taylor-Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (5.7)$$

¹Wir vertauschen hier wieder zwei Grenzwerte. Dies muss man also mit Vorsicht genießen. Aber hier funktioniert es.

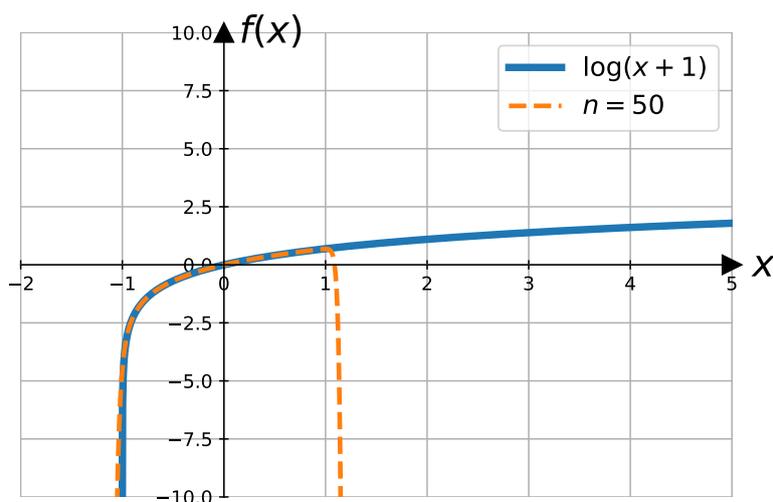


Abbildung 5.4: Taylornäherung des Logarithmus.

Übung: Berechnen Sie alle Ableitungen von $f(x) = \ln(1+x)$ für $x=0$ und überzeugen Sie sich, dass dies auf die Taylor-Reihe (5.7) führt.

Die Taylor-Reihe für $\ln(1+x)$ in Glg. (5.7) stellt die Funktion nur im Intervall $(-1, 1)$ dar. Brechen wir die Taylor-Reihe nach dem x^{50} -Term ab, so sieht man, wie das Taylor-Polynom bei $x=1$ scharf vom Graphen des Logarithmus abweicht.

Aus der Taylor-Reihe für $\ln(1+x)$ können wir durch termweises Ableiten die weitere Taylor-Reihe

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j, \quad (5.8)$$

gewinnen. Auch diese Taylor-Reihe stellt die Funktion nur über den endlichen Bereich $(-1, 1)$ exakt dar. Dies ist in Abb. 5.5 illustriert.

Ersetzt man in Glg. (5.8) x durch $-x$, so erhält man die sogenannte *geometrische Reihe**

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots \quad (5.9)$$

Dies kann man natürlich auch direkt als Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x_0 = 0$ erhalten, da

$$f^{(n)}(x) = n! \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \xrightarrow{x=0} n!$$

Zum besseren Verständnis der geometrischen Reihe berechnen wir sie auf einem alternativen Weg. Hierzu betrachten wir die endliche Reihe

$$(1-x) \sum_{j=0}^n x^j = \sum_{j=0}^n [x^j - x^{j+1}] = (1-x) + (x-x^2) + (x^2-x^3) + \dots + (x^n - x^{n+1}).$$

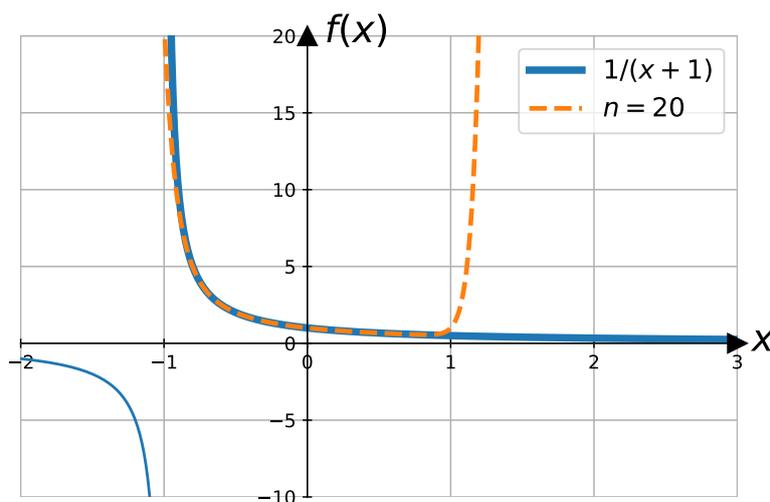


Abbildung 5.5: Näherungspolynom mit Grad $n = 20$ (orange gestrichelt) basierend auf der Taylorreihe der Funktion $1/(1+x)$ (blau).

Auf der rechten Seite heben sich alle Summanden weg mit Ausnahme des ersten Terms für $j = 0$ und des zweiten Terms für $j = n$. Dies führt auf

$$(1-x) \sum_{j=0}^n x^j = 1 - x^{n+1},$$

so dass

$$\sum_{j=0}^n x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \quad (5.10)$$

Wir sehen nun, dass im Limes $n \rightarrow \infty$ der Ausdruck auf der rechten Seite für $|x| < 1$ konvergiert und auf die Taylor-Reihe in Glg. (5.9) führt. In diesem Fall ist die Taylor-Reihe also für $|x| < 1$ mit der Funktion $f(x)$ identisch. Außerhalb dieses Bereichs divergiert die Taylor-Reihe, obwohl die Funktion für $|x| > 1$ existiert. In diesem Fall ist es augenscheinlich, dass der Konvergenzradius der Taylor-Reihe durch die Divergenz der Funktion bei $x = 1$ beschränkt wird, siehe Abb. 5.5.

Die sogenannte *Lorentz-Kurve*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (5.11)$$

führt für $x_0 = 0$ auf die Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-x)^{2j} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (5.12)$$

Obwohl diese Funktion scheinbar keine Pole besitzt, divergiert ihre Taylor-Reihe dennoch bei $x = 1$, siehe Abb. 5.6. Dies beruht darauf, dass die Funktion sehr wohl Pole besitzt, allerdings nur in der komplexen Zahlenebene bei $x = i$ und $x = -i$, s. Kap. 7.

Übung: Berechnen Sie die ersten paar Terme der Taylor-Reihe (5.12) der Lorentz-Kurve direkt aus Glg. (5.2).

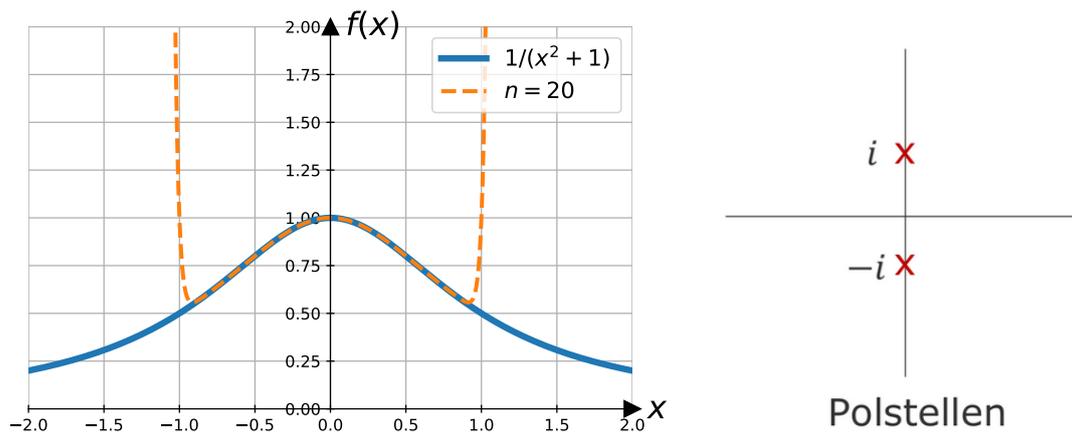


Abbildung 5.6: Taylorreihe der Lorentzkurve abgeschnitten bei $n=20$. Augenscheinlich divergiert die Taylor-Reihe bei $|x| = 1$. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Funktion in der komplexen Zahlenebene Polstellen hat (s. Kap. 7).

Die Taylor-Reihe der Lorentz-Kurve lässt sich allerdings auch effizienter gewinnen, indem wir in der Taylor-Reihe

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - \dots \quad (5.13)$$

einfach x durch x^2 ersetzen.

Näherungspolynome von Produkten von Funktionen kann man meist schneller herleiten, indem man die entsprechenden Näherungen der Faktoren miteinander multipliziert. So finden man beispielsweise für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \ln(1+x) \quad (5.14)$$

die Näherung

$$f(x) = (1 - x^2 + x^4 - \dots) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x^3 = x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \dots \quad (5.15)$$

Hier haben wir im Ergebnis nur die Terme bis zur Ordnung x^3 berücksichtigt. Es ist in diesem Fall wichtig, dass die Näherungen der einzelnen Faktoren auch bis zu dieser Ordnung genau sind. (In der vorigen Formel sind wir in der Näherung der Faktoren über das Ziel hinaus geschossen, das wir auch die Terme x^4 berücksichtigt haben.)

Übung: Berechnen Sie auch noch den x^4 -Term des Taylor-Polynoms.

5.3 Regel von L'Hospital

Man hat es häufig mit Grenzwerten zu tun, die auf den ersten Blick problematisch sind. Ein Beispiel hierfür ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}. \quad (5.16)$$

Sowohl Zähler als auch Nenner tendieren im Limes gegen Null. Allgemeiner können wir Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

betrachten, wobei $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Derartige Grenzwerte müssen sorgfältig betrachtet werden, da sie beliebige Werte (inkl. $\pm\infty$) annehmen können.

Die Taylor-Reihe gibt uns eine Methode an die Hand, die Grenzwerte systematisch zu betrachten. Wir können sowohl Zähler als auch Nenner in eine Taylor-Reihe um den Punkt x_0 entwickeln:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ g(x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Dieser Ausdruck ist bekannt als *Regel von L'Hospital**. Wenden wir diese Regel auf den anfänglichen Grenzwert an, so erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1. \quad (5.18)$$

Es kann vorkommen, dass selbst nach Anwendung der Regel von L'Hospital Zähler und Nenner weiterhin gegen Null tendieren. Dies passiert beispielsweise für

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}. \quad (5.19)$$

Der Grund liegt darin, dass nun nicht nur $f(x_0) = g(x_0) = 0$, sondern auch $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$. In diesem Fall genügt die Näherung in Glg. (5.17) nicht (da alle Terme auf der rechten Seite verschwinden). Nehmen wir den nächsten Term in der Taylor-Reihe mit, so erhalten wir

$$f(x) \simeq \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 \quad g(x) \simeq \frac{1}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2.$$

In diesen Fällen findet man nun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}. \quad (5.20)$$

Für unser Beispiel erhält man beispielsweise

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}. \quad (5.21)$$

Verschwindet auch die zweite Ableitung von Nenner und Zähler für $x = x_0$, fährt man entsprechend fort.

5.4 Hyperbelfunktionen

Hier wollen wir uns nun näher mit den sogenannten *Hyperbelfunktionen*** beschäftigen, die wir bereits im Rahmen von Aufgabe 2.9 kennengelernt hatten:

Definitionen der Hyperbelfunktionen

Sinus hyperbolicus:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Kosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Tangens hyperbolicus:

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Kotangens hyperbolicus:

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Wir haben im Rahmen der Aufgabe 2.9 gesehen, dass die Hyperbelfunktionen Additionstheoreme erfüllen, die den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen sehr ähnlich sind. Die Verwandtschaft der beiden Funktionsfamilien kann man auch an den Taylor-Reihen ablesen. Entwickelt man den Sinus und Kosinus hyperbolicus in eine Taylor-Reihe um $x_0 = 0$, so findet man

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (5.22)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (5.23)$$

Bis auf die alternierenden Vorzeichen sind diese identisch mit den Taylor-Reihen von Sinus und Kosinus,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Ebenso erfüllen die Hyperbelfunktionen eine zum trigonometrischen Pythagoras analoge Identität,

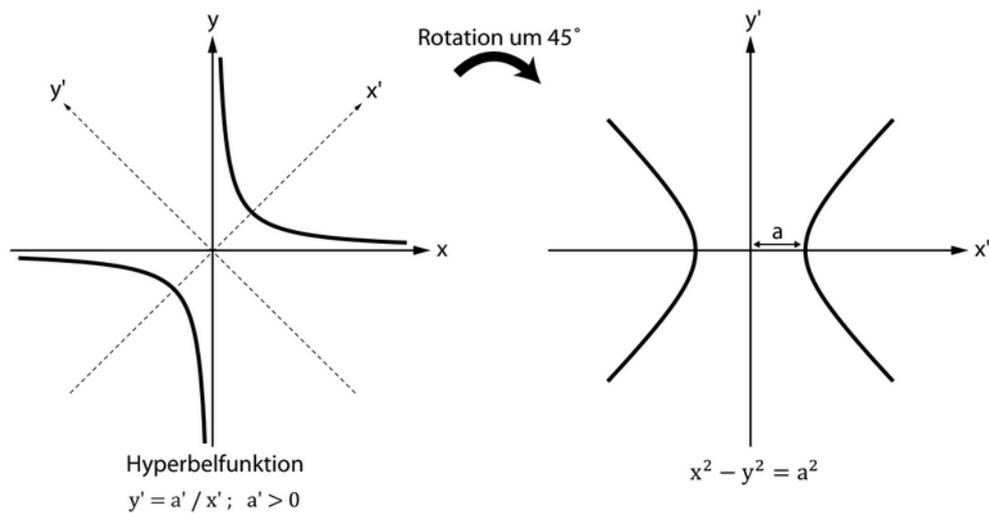
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (5.24)$$

Diese Identität prüft man einfach nach, indem man die Hyperbelfunktionen explizit durch ihre Definition ersetzt und den resultierenden Ausdruck ausmultipliziert.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Hyperbelfunktionen und *Hyperbeln** verstehen. In der Schule haben sie vermutlich die Funktion

$$f(x) = \frac{a^2}{x}$$

als Hyperbeln kennengelernt. Setzen wir $y = f(x)$, so sehen wir, dass die Hyperbel die Menge der Punkte (x, y) mit $xy = a^2$ ist. Wir können nun die Koordinatenachsen um 45° drehen, wie in Abb.

Abbildung 5.7: Umparametrisierung entspricht Drehung um 45° .

5.7 dargestellt. Die neuen, gestrichenen und die alten, ungestrichenen Koordinaten sind durch

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

verknüpft. In den gestrichenen Koordinaten nimmt die Gleichung der Hyperbel die Form

$$\frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = a^2$$

an. Wir erhalten also die *Hyperbelgleichung***

$$(x')^2 - (y')^2 = (a')^2, \quad (5.25)$$

wobei $(a')^2 = 2a^2$. Im Folgenden werden wir nur noch die neuen Koordinaten verwenden und daher der Einfachheit halber die Striche weglassen.

Bis auf das Vorzeichen von y^2 entspricht die Hyperbelgleichung $x^2 - y^2 = a^2$ der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ für einen Kreis mit Radius a . Aufgrund des trigonometrischen Pythagoras können wir den Kreis durch einen Winkel

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (5.26)$$

parametrisieren, s. Abb. 5.8. Die Umkehrfunktionen des Sinus und Kosinus geben also eine Bogenlänge (in Abb. 5.8 als B gekennzeichnet) an und heißen demnach Arcus-Funktionen (lat. *arcus* = Bogen).

Mit Glg. (5.24) können wir nun Hyperbeln analog mithilfe der Hyperbelfunktionen parametrisieren,

$$x = a \cosh t, \quad y = a \sinh t. \quad (5.27)$$

Auch dies ist in Abb. 5.8 illustriert. Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen geben also den Parameter t der Hyperbel. Es stellt sich nun die Frage, ob der Parameter t auch eine geometrische Bedeutung (analog zur Bogenlänge im Fall des Kreises) hat.

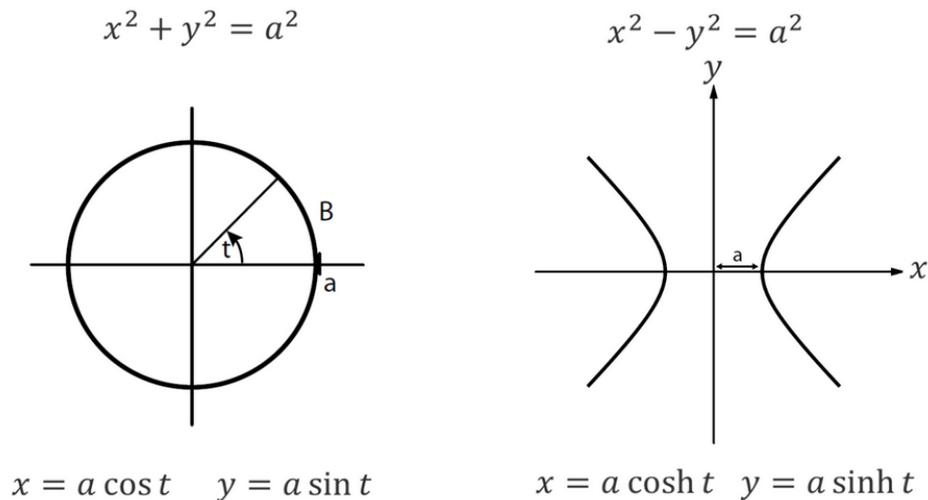


Abbildung 5.8: Parametrisierung von Hyperbeln mithilfe der Hyperbelfunktionen.

Es stellt sich heraus, dass der Parameter t mit der in Abb. 5.9 definierten Fläche S zusammenhängt. Wir berechnen diese Fläche, indem wir von der Fläche des in Abb. 5.9 angedeuteten Dreiecks die Fläche zwischen Hyperbel und x -Achse abziehen:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xy - \int_a^x dx' y \\ &= \frac{1}{2}xy - \int_a^x dx' \sqrt{x'^2 - a^2} \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral, indem wir die Parametrisierung durch die Hyperbelfunktionen substituieren. Im Integral führt dies auf $x' = a \cosh t'$ und $dx' = a \sinh t' dt'$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2}{2} \sinh t \cosh t - \int_0^t dt' a \sinh t' \sqrt{a^2 \cosh^2 t' - a^2} \\ &= \frac{a^2}{2} \sinh t \cosh t - a^2 \int_0^t dt' \sinh^2 t' \\ &= \frac{a^2}{2} \sinh t \cosh t - a^2 \int_0^t dt' \frac{1}{4} (e^{2t'} - 2 + e^{-2t'}) \\ &= \frac{a^2}{8} (e^{2t} - e^{-2t}) - \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - 2t + \frac{1}{-2} e^{-2t} \right) \\ &= \frac{a^2 t}{2} \end{aligned}$$

Demnach sind S und t tatsächlich proportional zueinander. Führen wir mit $S_0 = \pi a^2$ die Fläche eines Kreises mit Radius a ein, so erhalten wir

$$t = 2\pi \frac{S}{S_0}, \quad S_0 = \pi a^2. \quad (5.28)$$

Dieselbe Relation erfüllt der Winkel t im Falle des Kreises, wenn S die Fläche des von positiver x -Achse und der Verbindungslinie von Ursprung zum Kreispunkt definierte Kreissegment ist.

5.5 Area-Funktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen geben also eine Fläche an und heißen demnach *Area-Funktionen*** (lat. *area* = Fläche):

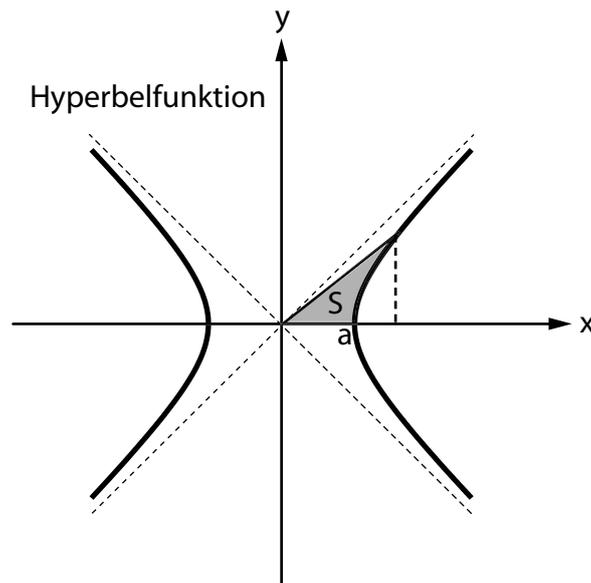


Abbildung 5.9: Definition der Fläche S für den Punkt (x, y) auf der Hyperbel mit $x = a \cosh t$ und $y = \sinh t$. Man findet, dass $t = 2\pi S/S_0$ mit $S_0 = \pi a^2$.

Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen lauten wie folgt:

$$f(x) = \sinh x, \quad \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x, \quad \text{Areasinus hyperbolicus}$$

$$f(x) = \cosh x, \quad \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh} x, \quad \text{Areakosinus hyperbolicus}$$

$$f(x) = \tanh x, \quad \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x, \quad \text{Areatangens hyperbolicus}$$

$$f(x) = \operatorname{coth} x, \quad \rightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth} x, \quad \text{Areakotangens hyperbolicus}$$

Diese Funktionen sind in Abb. 5.10 und 5.11 dargestellt. Die Areafunktionen lassen sich alternativ durch natürliche Logarithmen ausdrücken:

Explizite Ausdrücke für Arsinh und Arcosh

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Diese alternativen Ausdrücke lassen sich wie folgt herleiten. Im Sinus hyperbolicus ersetzen wir zunächst $e^x = z$ und stellen um:

$$\sinh x = y = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

$$2yz = z^2 - 1$$

$$0 = z^2 - 2yz - 1.$$

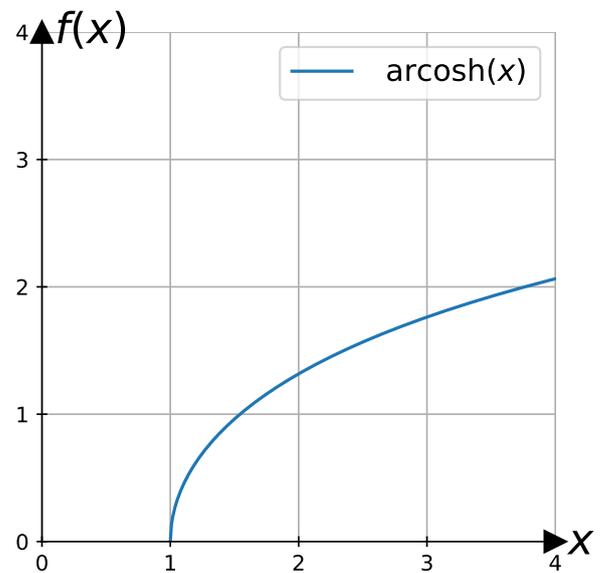
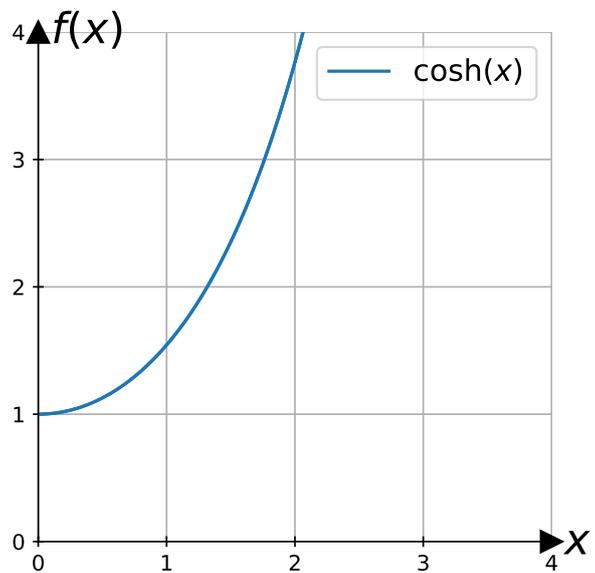
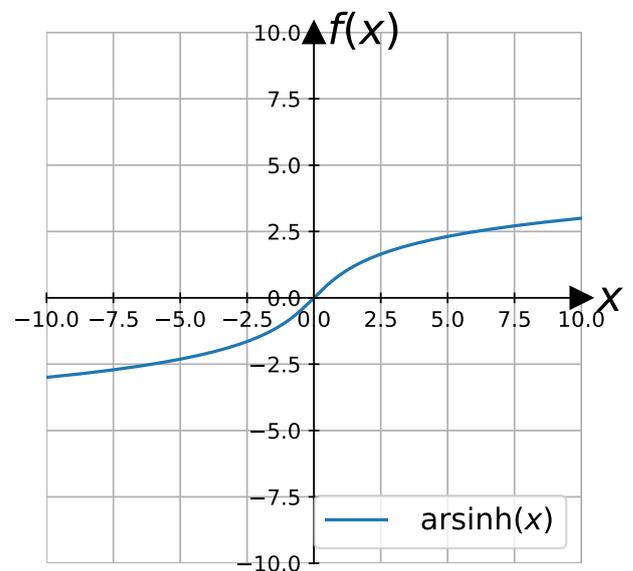
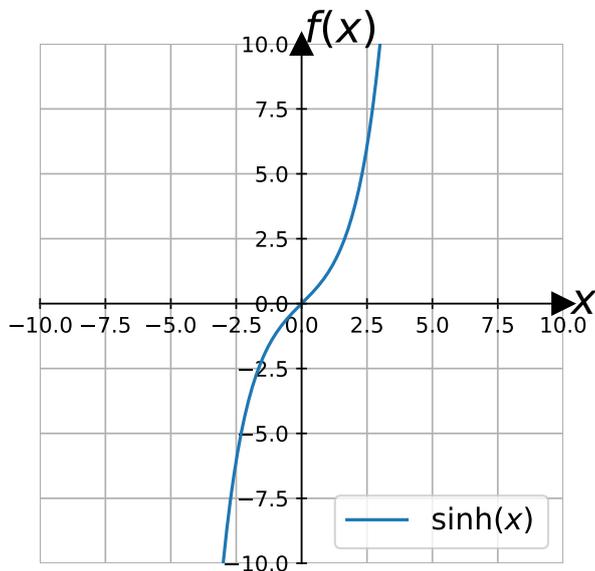


Abbildung 5.10: Hyperbelfunktionen (links) und ihren Umkehrfunktionen (rechts). Oben: Sinus hyperbolicus und Areasinus hyperbolicus. Unten: Kosinus hyperbolicus und Areakosinus hyperbolicus (s. auch Legenden). Im Falle des Kosinus hyperbolicus ist nur der für die Umkehrfunktion relevante Ast mit $x > 0$ gezeigt.

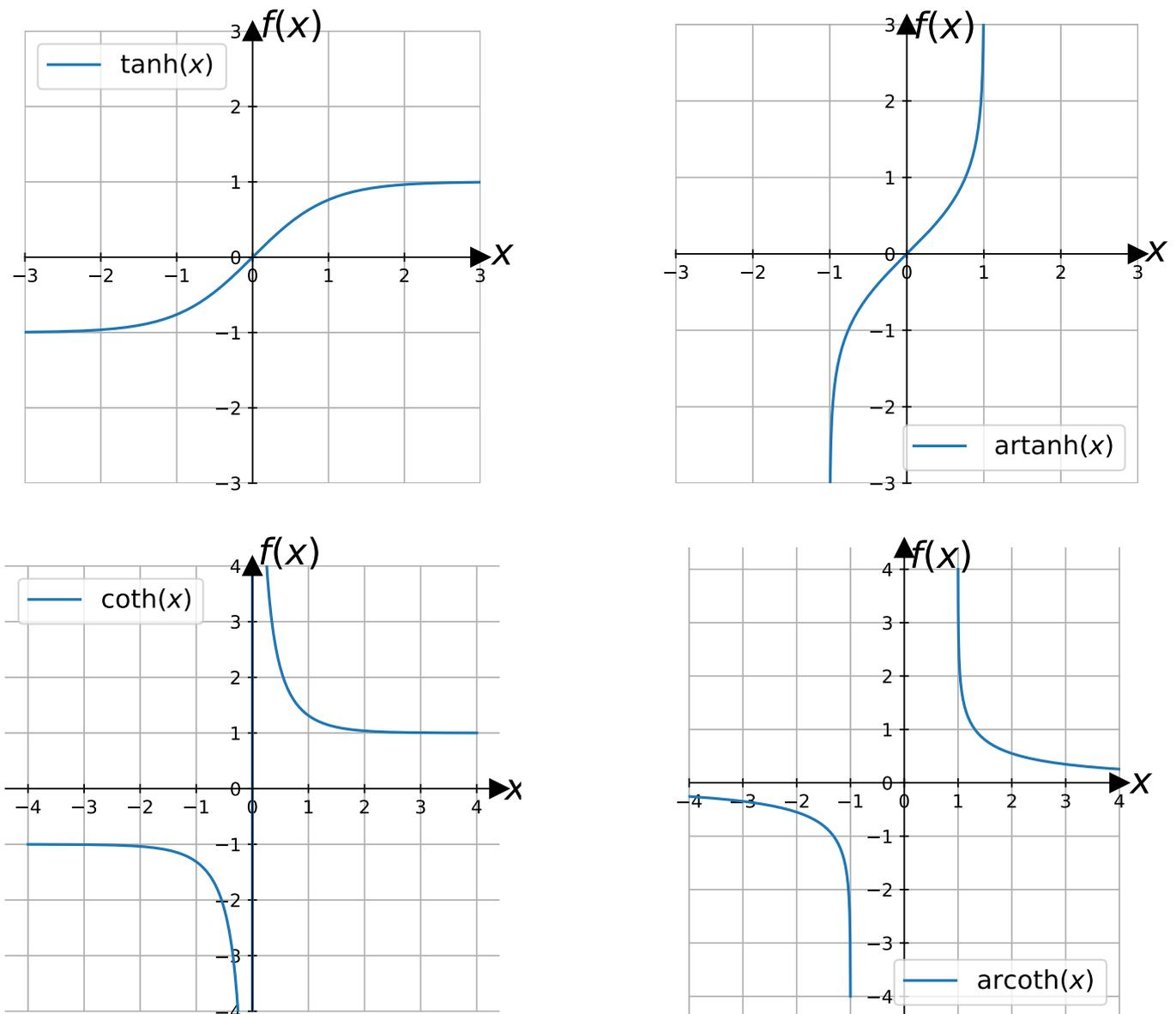


Abbildung 5.11: Hyperbelfunktionen (links) und ihren Umkehrfunktionen (rechts). Oben: Tangens hyperbolicus und Areatangens hyperbolicus. Unten: Kotangens hyperbolicus und Areakotangens hyperbolicus (s. auch Legenden).

Lösen der quadratischen Gleichung gibt

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Da $z = e^x > 0$ wählen wir das positive Vorzeichen. Damit ergibt sich für den arsinh:

$$x = \operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right). \quad (5.29)$$

Wir folgen dem gleichen Schema für den Arcuskosinus hyperbolicus:

$$\begin{aligned} \cosh(x) = y &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ 2yz &= z^2 + 1 \\ 0 &= z^2 - 2yz + 1. \end{aligned}$$

Diesmal gibt die quadratische Gleichung

$$z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Wieder wählen wir das positive Vorzeichen und finden

$$x = \operatorname{arcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right). \quad (5.30)$$

Die Ableitungen der Areafunktionen lassen sich über die Ableitungsregel (3.40) für Umkehrfunktionen berechnen. Aus $[\sinh(x)]' = \cosh(x)$ folgt dann

$$\begin{aligned} [\operatorname{arsinh}(x)]' &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

wobei wir Glg. 5.24 benutzt haben. Die Ableitungen der übrigen Areafunktionen lassen sich auf gleichem Wege berechnen:

Ableitungen der Areafunktionen

Die Ableitungen der Areafunktionen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} [\operatorname{arsinh}(x)]' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ [\operatorname{arcosh}(x)]' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ [\operatorname{artanh}(x)]' &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1 \\ [\operatorname{arcoth}(x)]' &= \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1 \end{aligned}$$

Übung: Leiten sie die Ableitungen aller Areafunktionen her.

5.6 Aufgaben

Aufgabe 5.1 Hyperbelfunktionen

Vereinfachen Sie

$$\frac{\sinh(2x)}{\sinh x}; \quad \frac{1}{\cosh x - \sinh x}$$

Ihr Ergebnis soll keine Brüche mehr enthalten.

Aufgabe 5.2 Taylor-Reihen I

Berechnen Sie die folgenden Taylor-Reihen bis zur vierten Ordnung:

- $\frac{1}{1+x}$ um den Punkt $x = 0$
- $\ln(1+x)$ um den Punkt $x = 0$ (Können Sie einen Zusammenhang mit der vorigen Taylor-Reihe herstellen?)
- $\frac{1}{x}$ um den Punkt $x = 5$
- $\sqrt{1+x}$ um den Punkt $x = 0$
- \sqrt{x} um den Punkt $x = 0$
- $\tanh x$ um den Punkt $x = 0$

Aufgabe 5.3 Taylor-Reihen II

Geben Sie für die folgenden Funktionen die Taylor-Reihen um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung an (d.h. inklusive des Terms $\sim (x - x_0)^4$):

- $(1 - x^2)e^{-x^2}$
- $\ln(1 + x^2)$
- $\frac{1}{1 + \sin x}$
- e^{-1/x^2}
- $x \coth x$

Sie können die Rechnungen in einigen Fällen vereinfachen, indem sie die die Taylor-Reihen aus Aufgabe 5.2 benutzen.

Aufgabe 5.4 Umkehrfunktionen des $\tanh x$ und $\coth x$

- Geben Sie die Ableitung von $\operatorname{artanh} x$ an, indem Sie die Regel für die Ableitung von Umkehrfunktionen benutzen.
- Drücken Sie $\operatorname{artanh} x$ durch den \ln aus.
- Benutzen die den Ausdruck aus der vorigen Teilaufgabe, um noch einmal die Ableitung des $\operatorname{artanh} x$ zu berechnen.

- Bestimmen Sie die Stammfunktion von $\operatorname{artanh}x$.
- Bestimmen Sie die Stammfunktion von $x\operatorname{artanh}x$.
- Wenn Sie noch nicht erschöpft sind, können Sie all das noch einmal für den $\operatorname{arcoth}x$ machen.

Aufgabe 5.5 Feynman-Trick

- Überzeugen Sie sich, dass $\frac{1}{a} = \int_0^\infty dx e^{-ax}$ (für $a > 0$)
- Leiten Sie beide Seiten nach dem Parameter a ab. (Gehen Sie davon aus, dass Sie Ableitung und Integration vertauschen dürfen.) Auf diese Weise bekommen Sie das Ergebnis für ein weiteres Integral.
- Überzeugen Sie sich auf konventionelle Weise, dass das Ergebnis für dieses Integral tatsächlich stimmt.
- Nutzen Sie diesen Trick, um $\int_0^\infty dx x^n e^{-x}$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

6. Vektoren und Matrizen

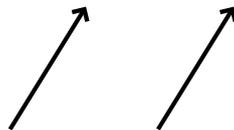
6.1 Vektoren

Viele physikalische Größen sind nicht nur durch eine Zahl, sondern auch durch eine Richtung gekennzeichnet, z.B. Geschwindigkeit, zurückgelegte Strecke (Verschiebung), Beschleunigung oder Kraft. Diese Größen bezeichnet man als Vektoren.¹ Entsprechend enthalten auch viele physikalische Grundgesetze – wie beispielsweise das zweite Newtonsche Gesetz – Vektorgleichungen.

Die einfachste Realisierung von Vektoren sind gerichtete Strecken:

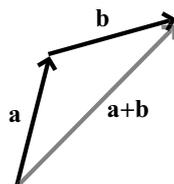


Vektoren sind frei verschiebbar; z.B. sind die folgenden Vektoren gleich:



Wir werden Vektoren durch **fettgedruckte** Buchstaben bezeichnen. Die Länge eines Vektors **a** wird häufig durch $|\mathbf{a}|$ oder einfach a bezeichnet.

Vektoren können zunächst addiert und subtrahiert werden. Geometrisch ist die Addition wie die Hintereinanderausführung von Verschiebungen um die beiden Summanden definiert:



¹Physikalische Größen wie die Masse, die nur durch eine Zahl (sowie Einheit) charakterisiert werden, bezeichnet man als *Skalare*^{*}. Neben Skalaren und Vektoren gibt es auch noch Tensoren.

Die Addition hängt offenbar nicht von der Reihenfolge der Summanden ab.

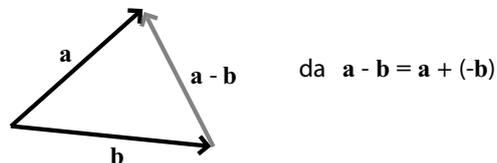
Multipliziert man einen Vektor \mathbf{a} mit einer reellen Zahl $\alpha > 0$, so bleibt die Richtung des Vektors erhalten, aber seine Länge ändert sich um den Vorfaktor:

$$\alpha > 0: \quad \alpha \cdot \begin{array}{c} \nearrow \\ \mathbf{a} \end{array} = \begin{array}{c} \nearrow \\ (\alpha \mathbf{a}) \end{array}$$

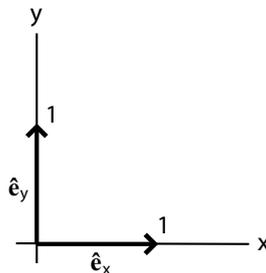
Ist α negativ, so zeigt der resultierende Vektor in die entgegengesetzte Richtung von \mathbf{a} :

$$-\alpha \mathbf{a} = -(\alpha \mathbf{a}) = \begin{array}{c} \searrow \end{array}$$

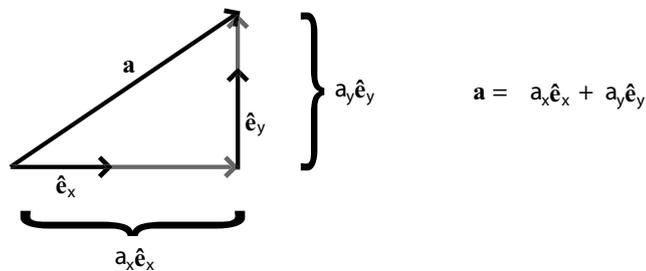
Die Subtraktion zweier Vektoren $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ergibt sich dann als die Summe $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$:



In der Schule haben sie vermutlich vornehmlich mit Vektoren als Spaltenvektoren gerechnet. Hierzu müssen wir die Vektoren in *Komponentendarstellung** schreiben. Wir definieren Einheitsvektoren (d.h. Vektoren der Länge 1) $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ entlang der Koordinatenachsen:



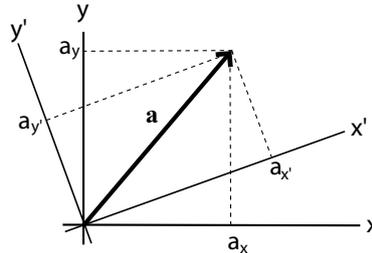
Jeder Vektor (in zwei Dimensionen, aber entsprechend in höheren Dimensionen) kann dann durch $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ ausgedrückt werden:



Häufig benutzt man dazu die Komponentenschreibweise

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Hierbei muss man aber beachten, dass dies die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems impliziert, während der Vektor *unabhängig* vom Koordinatensystem existiert. Derselbe Vektor kann in unterschiedlichen Koordinatensystemen verschiedene Formen annehmen. Dies ist in der folgenden Abbildung illustriert, die einen Vektor und zwei alternative Koordinatensysteme zeigt:



Im ungestrichenen Koordinatensystem hat der Vektor die Darstellung

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

im gestrichenen Koordinatensystem dagegen

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Trotz der unterschiedlichen Darstellungen handelt es sich in beiden Fällen um den *gleichen* Vektor.

Es ist nun leicht, die Regeln für die Addition und Subtraktion von Vektoren auf die Komponentendarstellung zu übertragen. Hierzu lesen wir einfach aus

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y) \pm (b_x \hat{\mathbf{e}}_x + b_y \hat{\mathbf{e}}_y) = (a_x \pm b_x) \hat{\mathbf{e}}_x + (a_y \pm b_y) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (6.4)$$

die Komponenten der Summe und Differenz ab und erhalten die bekannten Regeln

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

für die komponentenweise Addition und Subtraktion von Vektoren. Auf die gleiche Weise folgt, dass bei der Multiplikation mit einem Skalar einfach alle Komponenten mit diesem Skalar multipliziert werden.

6.2 Skalarprodukt (inneres Produkt)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Vektoren miteinander zu multiplizieren. Zunächst betrachten wir das *Skalarprodukt*^{*}, das zwei Vektoren einen Skalar (Zahl) zuordnet. Es kann auf koordinatenfreie Weise folgendermaßen definiert werden (s. Abb. 6.1):

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\text{Länge von } \mathbf{a}) \cdot (\text{Länge der Projektion von } \mathbf{b} \text{ auf Richtung von } \mathbf{a}) \\ &= ab \cos \varphi, \end{aligned}$$

wobei $\varphi = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ den von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} eingeschlossenen Winkel bezeichnet.

Die Bedeutung des Skalarprodukts liegt darin, dass es erlaubt, die Längen von Vektoren sowie den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel zu berechnen:

- Die Länge eines Vektors folgt aus $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = (\text{Länge des Vektors } \mathbf{a})^2$.
- Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} folgt aus

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab}. \quad (6.6)$$

Hieraus folgt insbesondere:

- Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} stehen senkrecht aufeinander, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.
- Für die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_i$ gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (6.7)$$

mit dem *Kronecker-Symbol***

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (6.8)$$

- Das Skalarprodukt $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{a} = a_i$ gibt die Projektion des Vektors \mathbf{a} auf die Richtung von $\hat{\mathbf{e}}_i$ an, da $\hat{\mathbf{e}}_i$ die Länge 1 hat. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Notation.

Beim Skalarprodukt kann der Punkt \cdot nicht einfach fortgelassen werden. Der Ausdruck \mathbf{abc} ist bedeutungslos, da das Resultat von der Klammerung abhängt. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ist ein zu \mathbf{c} paralleler Vektor. Im Gegensatz dazu wäre $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ist ein zu \mathbf{a} paralleler Vektor. Mit Punkt ist die Notation auch ohne Klammerung eindeutig, so dass $\mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}$ sowie $\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}$ legitime Ausdrücke sind.

Es gelten die folgenden

Rechenregeln für das Skalarprodukt

- Kommutativgesetz: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- Assoziativgesetz: $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$
- Distributivgesetz: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

Eigenschaften (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis von (c) bemerken wir, dass $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ die Projektion von $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ auf \mathbf{a} ist, multipliziert mit der Länge von \mathbf{a} . Da nach Abb. 6.2 Projektionen additiv sind, folgt (c).

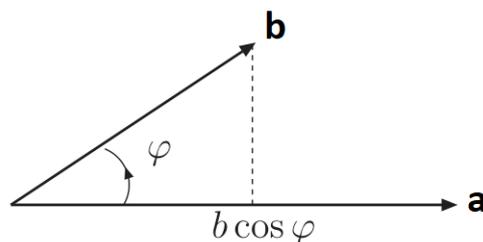


Abbildung 6.1: Grafische Darstellung des Skalarprodukts: $b \cos \varphi$ ist die Länge der Projektion von \mathbf{b} auf \mathbf{a} .

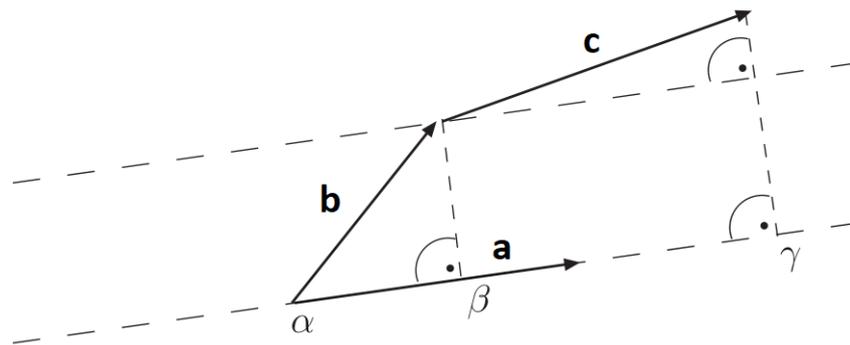
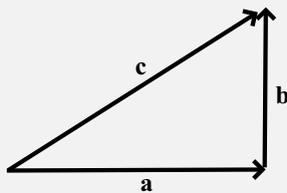


Abbildung 6.2: Zum Beweis von (c): Die Strecke $\alpha\beta$ ist die Projektion von \mathbf{b} auf \mathbf{a} , die Strecke $\beta\gamma$ ist die Projektion von \mathbf{c} auf \mathbf{a} und die Strecke $\alpha\gamma$ ist die Projektion von $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ auf \mathbf{a} .

Satz des Pythagoras.

Der Satz des Pythagoras folgt mit dem Skalarprodukt aus einer einfachen Rechnung:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$



$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + b^2 \\ \Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Neben der koordinatenfreien Definition ist häufig auch die Komponentendarstellung des Skalarprodukts wichtig und nützlich. Diese kann man (der Einfachheit halber für den Spezialfall von zwei Dimensionen) wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \cdot (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ &= a_1 b_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}_1 + a_1 b_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}_0 + a_2 b_1 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}_0 + a_2 b_2 \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}_1 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

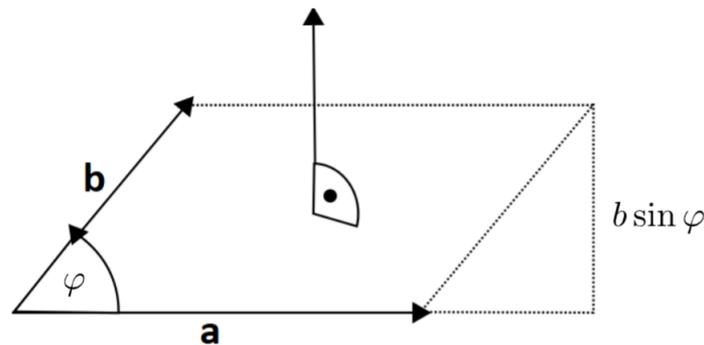
Insbesondere folgt daraus

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (6.9)$$

für die Länge von Vektoren. Aus der koordinatenfreien Definition des Skalarprodukts ergibt sich unmittelbar, dass es (im Gegensatz zu den Vektoren selbst, s.o.) unabhängig vom Koordinatensystem ist! Man sagt, dass das Skalarprodukt *invariant* unter Koordinatentransformationen ist. Größen mit dieser Eigenschaft heißen Skalare.

6.3 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Im dreidimensionalen Raum können wir neben dem Skalarprodukt auch ein *Vektorprodukt* – meist als *Kreuzprodukt** bezeichnet – definieren, das zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} einen weiteren Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zuordnet: Zwei (nicht parallele) Vektoren spannen eine Fläche auf, so dass man ihnen in drei Dimensionen einen (bis auf das Vorzeichen) eindeutigen Vektor zuordnen kann, der in Richtung

Abbildung 6.3: Durch \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannte Fläche

des *Normalenvektors*² zeigt und dem Betrag nach gleich der Fläche des von \mathbf{a} , \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms ist. (Die Fläche erfüllt die von Produkten erwartete Eigenschaft, dass sie sich verdoppelt, wenn sich \mathbf{a} oder \mathbf{b} verdoppeln.)

Man definiert darüber das sogenannte

Kreuz- oder Vektorprodukt

Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} wird ein Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zugeordnet,

$$\begin{array}{ccc} 2 \text{ Vektoren} & \longrightarrow & \text{Vektor} \\ \mathbf{a}, \mathbf{b} & & \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{array}$$

wobei:

- (1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf \mathbf{a} , \mathbf{b} steht,
- (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mit \mathbf{a} , \mathbf{b} eine Rechtsschraube (*Rechte-Hand-Regel*) bildet, und
- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Länge $ab \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ hat, d.h. die Länge von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist gerade durch die Fläche des Parallelogramms gegeben, das durch \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird.

Das Kreuzprodukt gibt somit den Normalenvektor sowie die Fläche eines von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms an. In der Physik wird das Kreuzprodukt beispielsweise in den Definitionen des Drehimpulses $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ oder der Lorentz-Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ verwendet.

Es gelten die folgenden

Rechenregeln für das Vektorprodukt

- (a) Antisymmetrie: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
- (b) Distributivgesetz: $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}$
- (c) Spezialfall: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ für $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, d.h. insbesondere $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Die Antisymmetrie folgt aus der Definition mittels Rechte-Hand-Regel. Die Spezialfall folgt aus der Tatsache, dass zwei parallele Vektoren ein entartetes Parallelogramm mit verschwindender Fläche aufspannen. Die Eigenschaft (b) ist mit Hilfe der koordinatenfreien Definition recht mühsam zu beweisen. Daher sei hier einfach auf die Literatur verwiesen.³

²Als Normalenvektor bezeichnet man einen zu einer Ebene senkrecht stehenden Vektor. Die Richtung dieses Vektors ist nur in drei Dimensionen eindeutig. Aus diesem Grund ist die Definition des Kreuzproduktes – im Gegensatz zum Skalarprodukt – auf dreidimensionale Vektorräume beschränkt.

³Sie können einen entsprechenden Beweis in S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Springer-Verlag, 2012, auf S. 70 finden.

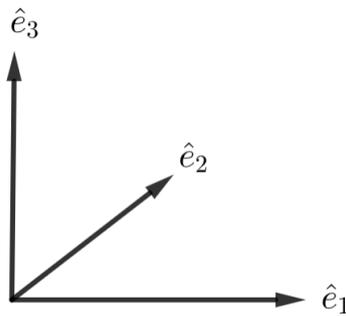


Abbildung 6.4: Zur Komponentendarstellung des Kreuzprodukts

Hinweis.

Der Ausdruck $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ ist ohne Klammerung bedeutungslos, wie man an folgendem Beispiel sieht:

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_x) \times \hat{\mathbf{e}}_x &= -\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_x = -\hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_y \times (\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x) &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck muss also immer mit Klammern geschrieben werden: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ oder $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Auch das Kreuzprodukt können wir nun in Komponentendarstellung schreiben. Hierzu bemerken wir, dass laut Definition

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 &= \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 &= \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 &= \hat{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}$$

Daraus folgt (mit dem Distributivgesetz):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + a_3\hat{\mathbf{e}}_3) \times (b_1\hat{\mathbf{e}}_1 + b_2\hat{\mathbf{e}}_2 + b_3\hat{\mathbf{e}}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\mathbf{e}}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{\mathbf{e}}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{\mathbf{e}}_3.\end{aligned}$$

Wir erhalten also die

Komponentendarstellung des Kreuzprodukts

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Die Indizes kann man sich mit Hilfe der folgenden Merkregel einprägen: Die Beiträge mit positivem Vorzeichen enthalten *zyklische* Permutationen von (123), s. Abb. 6.5.

Hier sind einige häufig benötigte

Formeln für das Kreuzprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (6.10)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{engl. back cab}) \quad (6.11)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (6.12)$$

Die erste Identität folgt aus dem trigonometrischen Pythagoras

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 \sin^2 \varphi = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \varphi) = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \quad (6.13)$$

Übung: Beweisen Sie die beiden anderen Identitäten.

6.4 Spatprodukt

Wir können das Kreuzprodukt anwenden, um das Volumen V eines durch drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds (Spats) anzugeben, wie es in Abb. 6.6 abgebildet ist. Wir können das Volumen als Produkt der von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Grundfläche (Parallelogramm) und der durch \mathbf{c} bestimmten Höhe angeben,

$$V = \underbrace{ab \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{c \cos(\angle(\mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}))}_{\text{Höhe des Parallelepipeds}}$$

$$= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

Das *Spatprodukt** $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ gibt demnach ein *vorzeichenbehaftetes* Volumen des Parallelepipeds wieder. Aufgrund der freien Wahl der Basisfläche erhalten wir die Identitäten

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}.$$

Beachten Sie, dass dies nur für *zyklische* Permutationen von \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} gilt; bei antizyklischen Permutationen ändert sich das Vorzeichen!

6.5 Analytische Geometrie

Mittels Vektoren kann man insbesondere geometrische Zusammenhänge rechnerisch (analytisch) beschreiben. In diesem Kapitel wollen wir geometrische Gebilde analytisch darstellen.

In Kap. 5 haben wir bereits Kreise und Hyperbeln analytisch dargestellt. Hierbei haben wir sowohl die *Koordinatenform** als auch die *Parameterform** eingeführt. Die Koordinatenform ist eine implizite Gleichung für die Menge der Punkte (x, y) des geometrischen Gebildes, im Falle des Kreises (Radius a) also

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Alternativ können wir den Kreis parametrisch über die Bogenlänge auf dem Einheitskreis beschreiben: $x = a \cos \varphi$ und $y = a \sin \varphi$, wobei der Parameter $\varphi \in [0, 2\pi]$.⁴ Wir suchen nun entsprechende Darstellungen für Geraden und Ebenen.

⁴Natürlich ist diese Parameterdarstellung nicht eindeutig. Es gibt beliebig viele mögliche Parameterdarstellungen.

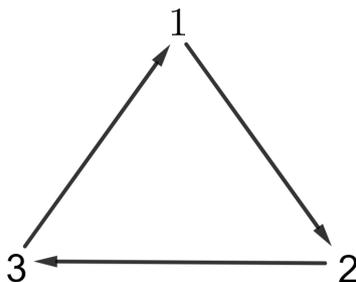
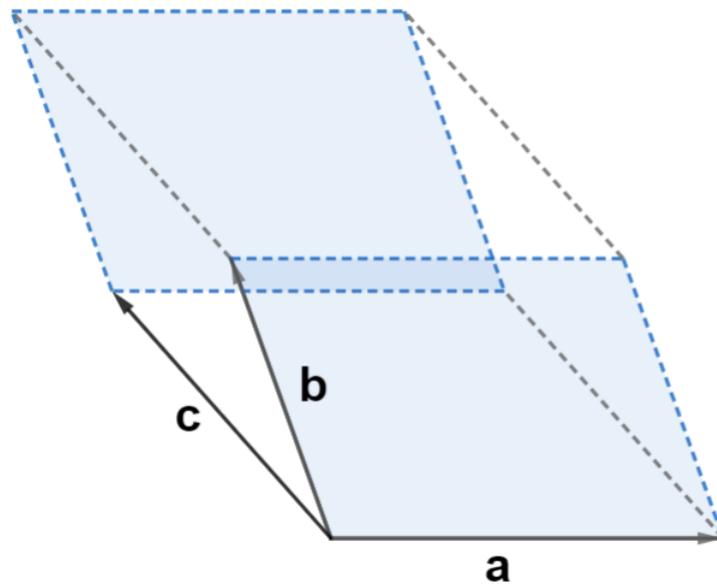
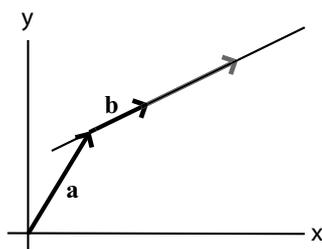


Abbildung 6.5: Zyklische Permutation

Abbildung 6.6: Von \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespanntes Parallelepiped

Gerade in Parameter- und Koordinatendarstellung



Parameterdarstellung (dimensionsunabhängig):

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$$

Koordinatendarstellung (in zwei Dimensionen):

$$n_x x + n_y y + n_0 = 0$$

In der Parameterdarstellung werden \mathbf{a} *Stützvektor* und \mathbf{b} *Richtungsvektor* genannt.

Die Parameterdarstellung gilt für beliebige Raumdimensionen, die Koordinatendarstellung ist auf eine Gerade in zwei Dimensionen beschränkt.

In zwei Dimensionen können wir beide Darstellungen leicht mit der Funktionsgleichung $y = mx + b$ einer Geraden in Beziehung setzen. Wir beginnen mit der Parameterform

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

In Komponenten erhalten wir also die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a_x + sb_x \\ y &= a_y + sb_y. \end{aligned}$$

Lösen wir die erste Gleichung nach s auf,

$$s = \frac{x - a_x}{b_x},$$

und setzen dies in zweite Gleichung ein, so erhalten wir

$$y = a_y + \frac{b_y}{b_x}(x - a_x). \quad (6.14)$$

Wir identifizieren $m = \frac{b_y}{b_x}$ als Steigung der Geraden und $b = a_y - \frac{b_y}{b_x} a_x$ als y-Achsen-Abschnitt. Die Koordinatenform können wir unmittelbar nach y auflösen und erhalten

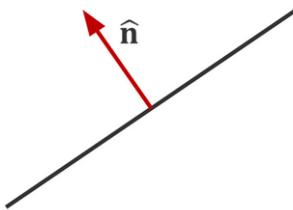
$$y = -\frac{n_x}{n_y} a - \frac{n_0}{n_y},$$

woraus man Steigung und y-Achsen-Abschnitt direkt ablesen kann.

Die Koordinatenform ist eng mit der *Normalenform** einer Gerade in zwei Dimensionen verbunden. Eine Gerade in zwei Dimensionen hat eine eindeutig definierte Normalenrichtung mit Einheitsvektor \mathbf{n} – dem Normalenvektor. Ist \mathbf{x}_0 also ein beliebiger Punkt auf der Gerade, so steht $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ für alle Punkte \mathbf{x} der Gerade senkrecht auf dem Normalenvektor:

Normalenform einer Gerade

In zwei Dimensionen lässt sich eine Gerade $\mathbf{x}(s) = \mathbf{a} + s\mathbf{b}$ durch die Normalenform darstellen:



$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \begin{pmatrix} b_y \\ -b_x \end{pmatrix}$$

Hierbei steht der Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor \mathbf{b} , so dass $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b} = 0$. Der Punkt \mathbf{x}_0 kann beliebig auf der Gerade gewählt werden.

Diese Darstellung ist auf zwei Dimensionen beschränkt, denn in höheren Dimensionen gibt es keine eindeutige Normalenrichtung einer Gerade. Schreiben wir die die Normalenform als

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = 0 \tag{6.15}$$

und identifizieren wir $n_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0$, so reduziert sie sich auf die Koordinatenform der Gerade.

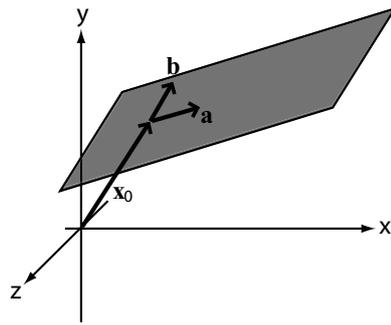
Zwei Geraden $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + s\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 + t\mathbf{b}_2$ können identisch sein, parallel zueinander verlaufen, sich schneiden oder windschief sein. Die möglichen Lagebeziehungen der Geraden hängen von der Dimension ab. In zwei Dimensionen gilt Folgendes:

- Zwei Geraden sind parallel, sofern ihre Richtungsvektoren parallel sind, $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{b}_2$.
- Parallele Geraden sind identisch, sobald sie einen gemeinsamen Punkt haben, also wenn s oder t existieren, so dass $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + s\mathbf{b}_1$ oder $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 + t\mathbf{b}_2$.
- Nicht parallele Geraden schneiden sich, wobei der Schnittpunkt aus dem Gleichungssystem $\mathbf{a}_1 + s\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + t\mathbf{b}_2$ bestimmt werden kann.

In drei (oder höheren) Dimensionen können Geraden zusätzlich *windschief** stehen. Dies ist der Fall, wenn die Geraden nicht parallel zueinander verlaufen und keinen Schnittpunkt besitzen. Ein Schnittpunkt existiert, wenn t und s existieren, so dass die Gleichung $\mathbf{a}_1 + s\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + t\mathbf{b}_2$ erfüllt ist. Dies sind drei Gleichungen (je eine für die drei Komponenten) für zwei Unbekannte, was nur in Spezialfällen lösbar ist.

Entsprechende Darstellungen lassen sich auch für *Ebenen** in drei Dimensionen angeben. Hierbei ist zu beachten, dass die Normalenform einer Ebene nur in drei (aber nicht in höheren) Dimensionen existiert, da die Ebene nur in drei Dimensionen eine eindeutige Normalenrichtung definiert:

Darstellungen einer Ebene in drei Dimensionen



Parameterform:

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Koordinatenform:

$$n_x x + n_y y + n_z z + n_0 = 0$$

Normalenform:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{n}} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) / |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Die Richtungsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} dürfen nicht parallel sein, damit sich eine Ebene ergibt.

Die Normalenform

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = n_x x + n_y y + n_z z - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_0 = n_x x + n_y y + n_z z + n_0 = 0 \quad (6.16)$$

reduziert sich wieder auf die Koordinatenform, wenn wir $n_0 = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}_0$ identifizieren.

Die möglichen Lagebeziehungen zweier Ebenen lassen sich am effizientesten mittels ihrer Normalenform $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$ und $\hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) = 0$ diskutieren:

- Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren parallel zueinander sind, $\hat{\mathbf{n}}_1 \parallel \hat{\mathbf{n}}_2$.
- Zwei parallele Ebenen sind identisch, wenn der Vektor $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ senkrecht auf dem Normalenvektor steht, $\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \hat{\mathbf{n}}_2 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$.
- Ebenen mit $\hat{\mathbf{n}}_1 \not\parallel \hat{\mathbf{n}}_2$ schneiden sich entlang einer Schnittgeraden.

Die Schnittgerade muss den Koordinatenformen beider Ebenen genügen. Dies sind zwei Gleichungen für die drei Unbekannten x, y, z , so dass im Allgemeinen tatsächlich ein freier Parameter bleibt, wie für eine Gerade erwartet.

6.6 Vier Dimensionen

Wir können geometrische Gebilde auch in höheren Dimensionen diskutieren. Als Beispiel betrachten wir *Hyperebenen**** in vier Dimensionen. Ebenso wie Ebenen in drei Dimensionen haben Hyperebenen eine Dimension weniger als der einbettende Raum. Hyperebenen in vier Dimensionen sind also dreidimensionale Gebilde. Wir können für sie wieder verschiedene Darstellungen wählen. Die Parameterform hat nun drei Parameter s, t, u ,

$$\mathbf{x}(s, t, u) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + u\mathbf{c}, \quad (6.17)$$

wobei alle Vektoren vierdimensional sind. Alternativ erfüllen die Koordinaten des Vektors \mathbf{x} die Koordinatenform

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 + n_0 = 0. \quad (6.18)$$

Hyperebenen zeichnen auch immer eine eindeutige Normalenrichtung aus, so dass wir sie in Normalenform

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (6.19)$$

angeben können.

Entsprechend der Diskussion der Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen können wir nun auch die Lagebeziehungen von Hyperebenen diskutieren. Hyperebenen sind parallel, wenn ihre

Normalenvektoren parallel zueinander sind. Sind sie nicht parallel, so schneiden sie sich in einer Ebene. Denn die Schnittmenge muss die Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned}n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{13}x_3 + n_{14}x_4 + n_{10} &= 0 \\n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 + n_{24}x_4 + n_{20} &= 0\end{aligned}$$

beider Hyperebenen erfüllen. Dies sind zwei Gleichungen für die vier Koordinaten. Zwei Koordinaten bleiben also als freie Parameter unbestimmt, so dass man im Allgemeinen eine Ebene im vierdimensionalen Raum erhält.

Ähnlich können wir die Schnittmenge zweier Ebenen im vierdimensionalen Raum diskutieren. Wie wir gerade gesehen haben, wird eine Ebene durch zwei Gleichungen für die vier Koordinaten festgelegt. Die Schnittmenge zweier Ebenen muss demnach diese beiden Gleichungen für beide Ebenen, also insgesamt vier Gleichungen, erfüllen:

$$\begin{aligned}n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{13}x_3 + n_{14}x_4 + n_{10} &= 0 \\n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 + n_{24}x_4 + n_{20} &= 0 \\n_{31}x_1 + n_{32}x_2 + n_{33}x_3 + n_{34}x_4 + n_{30} &= 0 \\n_{41}x_1 + n_{42}x_2 + n_{43}x_3 + n_{44}x_4 + n_{40} &= 0\end{aligned}$$

Außer in Sonderfällen (die Ebenen könnten beispielsweise parallel verlaufen oder identisch sein), bestimmen diese vier Gleichungen eine eindeutige Lösung, so dass sich Ebenen im vierdimensionalen Raum in einem Punkt schneiden.

Schließlich betrachten wir die Schnittmenge einer Ebene mit einer Hyperebene. Wir parametrisieren die Ebene wieder über die Schnittmenge zweier Hyperebenen:

$$\begin{aligned}n_{11}x_1 + n_{12}x_2 + n_{13}x_3 + n_{14}x_4 + n_{10} &= 0 \\n_{21}x_1 + n_{22}x_2 + n_{23}x_3 + n_{24}x_4 + n_{20} &= 0 \\n_{31}x_1 + n_{32}x_2 + n_{33}x_3 + n_{34}x_4 + n_{30} &= 0\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als typische Schnittmenge also eine Gerade. (Die Ebene könnte natürlich auch komplett in der Hyperebene liegen.)

6.7 Lineare Gleichungssysteme

*Lineare Gleichungssysteme** spielen vielfach eine wichtige Rolle. So haben wir gerade gesehen, dass die Lagebeziehungen von Geraden, Ebenen oder Hyperebenen auf lineare Gleichungssysteme führen.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel:

$$\begin{aligned}5x + 2y &= 1 \\x - y &= 2\end{aligned}$$

Wir können in diesem Fall beispielsweise die zweite Gleichung nach y auflösen, $y = x - 2$, und dies in die erste Gleichung einsetzen, so dass $5x + 2(x - 2) = 1$. So erhält man $x = 5/7$ und $y = -9/7$.

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit drei Variablen hat die Form:

$$\begin{aligned}A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 &= b_1 \\A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 &= b_2 \\A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 &= b_3\end{aligned}$$

Man kann lineare Gleichungssysteme kompakt mithilfe von *Matrizen*** schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor}}, \quad \text{d.h. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Man bezeichnet eine waagerechte Reihe von Einträgen der Matrix als Zeile, eine senkrechte Reihe als Spalte. Im Allgemeinen muss die Anzahl der Einträge in einer Spalte nicht gleich der Anzahl der Einträge in einer Zeile sein.

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor ist folgendermaßen definiert:

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}x_j, \quad (6.20)$$

also beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

für eine 2×2 -Matrix. Die Skalarmultiplikation der ersten Zeile der Matrix mit dem Spaltenvektor gibt den obersten Eintrag des resultierenden Spaltenvektors etc.

Hier wollen wir mit dem *Gauß-Verfahren** ein systematisches Lösungsverfahren für derartige Gleichungssysteme diskutieren. Ziel des Gauß-Verfahrens ist es, das Gleichungssystem so umzuformen, dass die erste Gleichung alle Unbekannten enthält, die zweite Gleichung alle Unbekannten bis auf x_1 , die dritte Gleichung alle Unbekannten bis auf x_1 und x_2 etc. Die letzte Gleichung enthält dann nur eine Unbekannte und kann nach dieser aufgelöst werden. Setzt man das Ergebnis in die vorletzte Gleichung ein, erhält man wieder eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, die man unmittelbar auflösen kann. In dieser Weise fortfahrend löst man das gesamte Gleichungssystem.

Wir illustrieren das Gauß-Verfahren zunächst an zwei einfachen Beispielen:

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2 \\ 3x - 6y &= 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiere $\frac{1}{2} \times$ (erste Gleichung) von der zweiten Gleichung:

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 2 \\ -5y &= 0 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In der neuen Matrix sind alle Einträge unterhalb der Diagonalen Null, die Lösung ist daher trivial:

$$\Rightarrow y = 0; \quad x = \frac{1}{3}. \quad (6.22)$$

Beispiel 2.

$$\begin{array}{l}
2x + y - z = 1 \\
4x - y + z = 2 \\
2x + 2y + 2z = 4
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
2x + y - z = 1 \\
\Rightarrow -3y + 3z = 0 \\
\quad y + 3z = 3
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
2x + y - z = 1 \\
\Rightarrow -3y + 3z = 0 \\
\quad 4z = 3
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{4}, x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z - y) = \frac{1}{2}. \quad (6.23)$$

Ein Gleichungssystem muss weder eine Lösung haben noch muss die Lösung eindeutig sein. Keine Lösung hat beispielsweise das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
x - y = 1 \\
5x - 5y = 2.
\end{array}$$

Versuchen wir gemäß dem Gauß-Verfahren x aus der zweiten Gleichung zu eliminieren, so finden wir, dass sowohl x als auch y eliminiert werden und wir auf die Gleichung

$$0 = -3. \quad (6.24)$$

Dies ist offenbar ein Widerspruch. Beide Gleichungen sind inkompatibel.

Alternativ kann das Gleichungssystem auch unterbestimmt sein. Dies ist der Fall für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
x - y = 1 \\
5x - 5y = 5.
\end{array}$$

Versuchen wir nun, x aus der zweiten Gleichung zu eliminieren, so finden wir $0 = 0$. Die zweite Gleichung ist einfach ein Vielfaches der ersten Gleichung und enthält keine neue Information. Wir erhalten dann eine einparametrische Schar von Lösungen.

Die verschiedenen Fälle können wir geometrisch interpretieren. Für zwei Unbekannte x und y können wir die einzelnen Gleichungen jeweils als Normalenform einer Gerade in der xy -Ebene interpretieren.⁵ Zwei Gleichungen definieren also zwei Geraden. Diese Geraden können sich schneiden (eindeutige Lösung des Gleichungssystem entspricht dem Schnittpunkt der beiden Geraden), sie können parallel verlaufen (keine Lösung des Gleichungssystem) oder identisch sein (einparametrische Schar von Lösungen, nämlich alle Punkte auf der Gerade).

Ein allgemeines Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2
\end{array} \quad (6.25)$$

mit zwei Unbekannten hat also eine eindeutige Lösung, sofern die Normalenvektoren der durch die Gleichungen definierten Ebenen nicht parallel verlaufen. Dies ist der Fall, wenn das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

⁵Hier ist der Normalenvektor nicht notwendigerweise normiert.

der Normalenvektoren von Null verschieden ist. Hier haben wir die Vektoren formal auf drei Dimensionen erweitert, indem wir jeweils eine verschwindende x_3 -Komponente hinzugefügt haben. Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf der x_1x_2 -Ebene, so dass wir nur die x_3 -Komponente

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6.27}$$

des Kreuzprodukts untersuchen müssen. Wir finden also eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems, sofern

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \tag{6.28}$$

Die Größe auf der rechten Seite ist ein Spezialfall einer allgemeineren Konstruktion für Matrizen, der sogenannten Determinante. Für 2×2 Matrizen ist die Determinante über

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6.29}$$

definiert.

Auch in drei Dimensionen können die möglichen Lösungen von Gleichungssystemen leicht geometrisch interpretiert werden. Die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit einer beliebigen Anzahl an Unbekannten wird im Rahmen der *Linearen Algebra* untersucht.

Übung: Versuchen Sie die Lösbarkeit von Gleichungssystemen mit drei Gleichungen und drei Unbekannten geometrisch zu interpretieren. Können Sie eine geometrische Größe angeben, die bestimmt, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist?

6.8 Aufgaben

Aufgabe 6.1 Senkrechte Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ und $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Wann stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander?

Aufgabe 6.2 Vektoren

Berechne aus $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$:

- die Größen

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (6.30)$$

- die Winkel $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\angle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ und $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

Aufgabe 6.3 Senkrechte Vektoren I

Welche Vektoren steht senkrecht auf $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ und $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$?

Aufgabe 6.4 Dreieck I

Zeigen Sie mithilfe von Vektoren: In einem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmittelpunkte parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Aufgabe 6.5 Satz des Thales

Zeigen Sie mithilfe von Vektoren: : Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke AB, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel (Satz des Thales).

Aufgabe 6.6 Parallelogramm

Zeigen Sie mithilfe von Vektoren: Wenn ein Parallelogramm gleich lange Diagonalen hat, dann ist es ein Rechteck.

Aufgabe 6.7 Dreieck II

Berechnen Sie die Seitenlängen, die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten A(2|3|0); B(-1|1|0); C(-2|0|7).

Aufgabe 6.8 Senkrechte Vektoren II

Geben Sie die Menge aller zum Vektor $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ senkrechten Vektoren an.

Aufgabe 6.9 Kosinussatz

Zeigen Sie mithilfe von Vektoren: Für ein beliebiges Dreieck mit Seitenlängen a , b und c sowie dem c gegenüberliegenden Winkel φ (s. Abb.) gilt der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

Aufgabe 6.10 Doppelte Kreuzprodukte

Beweisen Sie die folgenden, häufig benutzten Identitäten für doppelte Kreuzprodukte:

$$(a) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \text{ (engl.: "back cab" Regel)}$$

$$(b) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Aufgabe 6.11 Gerade

- Eine Gerade geht durch den Punkt $(1, 2)$ und hat die Steigung 2. Wie lautet die Parameterdarstellung?
- Wie lautet der Normalenvektor \mathbf{n} mit Länge 1 zu dieser Geraden? Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?
- Wie lautet die funktionale Form der Geraden?

Aufgabe 6.12 Schulklasse

- In einer Klasse hat eine Schülerin doppelt so viele Mitschülerinnen wie Mitschüler, dagegen ein Schüler 2,6 mal so viele. Was ist die Zahl der Schülerinnen und Schüler?
- Ein Flugzeug braucht für die Strecke s mit dem Wind die Zeit t und gegen den Wind die Zeit $1,2t$. Wie groß sind Flugzeug- und Windgeschwindigkeit?

Aufgabe 6.13 Lineares Gleichungssystem I

Lösen Sie:

- $8x - 3y = 11; \quad 5x + 2y = 34.$
- $12x + 16y = 28; \quad 15x + 20y = 35.$
- $2x - 2y = -3; \quad -3x + 3y = 9.$
- $8x - 6y = 2; \quad 2x + 3y = 2.$

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse geometrisch.

Aufgabe 6.14 Lineares Gleichungssystem II

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssystems:

(a)

$$\begin{aligned} -6x_1 - 9x_2 + x_3 &= -8 \\ -6x_1 - 7x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

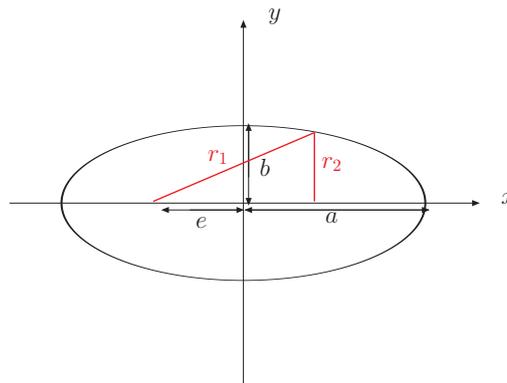


Abbildung 6.7: Ellipsengeometrie

(c)

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.15 Lineares Gleichungssystem III

Bestimmen Sie die Lösbarkeit des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha^2 x + (2\alpha^2 - 4)y + (2\alpha^2 + 1)z &= \alpha - 10 \\ 2x + y + 5z &= -6 \\ \alpha^2 x + (2\alpha^2 + 1)y + 2\alpha^2 z &= \alpha + 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.16 Matrixmultiplikation

Multiplizieren Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.17 Ellipsen

Aus den Newtonschen Gesetzen können die Planetenbahnen abgeleitet werden, die nach den bekannten Keplerschen Gesetzen Ellipsen beschreiben. Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei Brennpunkten (im Abstand $2e$ entlang der x -Achse) konstant ist, $r_1 + r_2 = 2a$, s. Abb. 6.7.

- Zeigen Sie, dass Ellipsen in kartesischen Koordinaten (mit dem Koordinatenursprung in der *Mitte* der Ellipse) die Koordinatengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Drücken Sie b durch a und e aus.

- Führen Sie kartesische Koordinaten x', y' mit Ursprung im rechten Brennpunkt ein (so dass $x' = x - e$ und $y' = y$) und schreiben Sie dann $x' = r \cos \varphi$ und $y' = r \sin \varphi$. Die Größen r und φ sind dann der Abstand vom Ursprung und der Winkel des Ortsvektors (x, y) mit der x -Achse. Zeigen Sie, dass Ellipsen (mit dem Koordinatenursprung jetzt im rechten Brennpunkt!) die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

erfüllen, wobei $p = a(1 - \varepsilon^2)$ (a ist die große Halbachse; ε die Exzentrizität).

7. Komplexe Zahlen

7.1 Lösbarkeit von Gleichungen

Je mehr man das Zahlensystem ausgehend von den natürlichen Zahlen erweitert, desto mehr Gleichungen werden lösbar. So ist die Gleichung

$$x + 1 = 0 \tag{7.1}$$

in den natürlichen Zahlen nicht lösbar. Ebenso ist

$$5x - 7 = 0 \tag{7.2}$$

im Rahmen der ganzen Zahlen und

$$x^2 - 2 = 0 \tag{7.3}$$

im Rahmen der rationalen Zahlen unlösbar.

Aber auch im Rahmen der reellen Zahlen gibt es algebraische Gleichungen, die keine Lösung haben. Dies gilt beispielsweise für die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0,$$

die formal durch $x = \pm\sqrt{-1}$ gelöst würde. Ebenso unlösbar ist

$$e^x + 1 = 0, \tag{7.4}$$

da der Logarithmus negativer Zahlen im Rahmen der reellen Zahlen nicht definiert ist.

Sollen die letzten beiden Gleichungen lösbar werden, so müssen wir also das Zahlensystem noch einmal erweitern. Es stellt sich heraus, dass derartige Zahlen – die sogenannten *komplexen Zahlen* – existieren und aus der Physik nicht mehr wegzudenken sind. Die komplexen Zahlen spielen in vielfacher Hinsicht eine herausragende Rolle. So hat im Rahmen der komplexen Zahlen jedes Polynom n -ten Grades genau n Nullstellen. (Im Reellen sind es nur maximal n Nullstellen.) Weiterhin stellt es sich heraus, dass im Komplexen Zusammenhänge zwischen Funktionen aufgedeckt

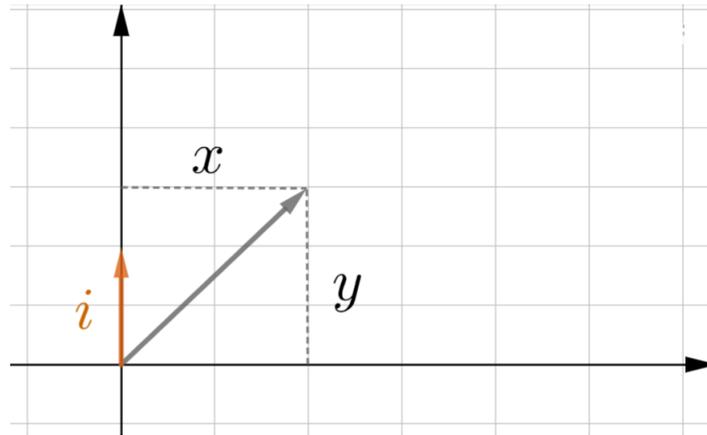


Abbildung 7.1: Graphische Darstellung einer komplexen Zahl $z = (x, y)$ in der komplexen Ebene mit (waagerechter) reeller und (senkrechter) imaginärer Achse. Man nennt x Realteil und y Imaginärteil der komplexen Zahl. i bezeichnet die komplexe Zahl $(0, 1)$.

werden, die im Reellen verborgen bleiben.¹ So werden wir z.B. sehen, dass die trigonometrischen Funktionen eng mit der Exponentialfunktion verknüpft sind.

7.2 Komplexe Zahlen als Zahlenpaare

Nach der Einführung der irrationalen Zahlen gibt es auf dem Zahlenstrahl keine Lücken mehr. Komplexe Zahlen z können also nicht mehr entlang einer Zahlengerade angeordnet werden. Stattdessen werden sie durch geordnete Zahlenpaare $z = (x, y)$ dargestellt.² Sie können also in einer Ebene (*komplexe Ebene*) dargestellt werden, wie in Abb. 7.1 zu sehen.

Hierbei heißt die x -Achse *reelle Achse*^{**}, die y -Achse wird als *imaginäre Achse*^{**} bezeichnet. Zahlen auf der reellen Achse werden weiter mit den bekannten reellen Zahlen identifiziert, $(x, 0) = x$. Man nennt daher auch x den *Realteil*^{**} und y den *Imaginärteil*^{**} einer komplexen Zahl $z = (x, y)$. Komplexe Zahlen haben offensichtlich Ähnlichkeiten mit Vektoren in zwei Dimensionen. Insbesondere sind Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen analog zu Vektoren in zwei Dimensionen definiert:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) - (x_2, y_2) &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2).\end{aligned}\tag{7.5}$$

Allerdings können wir darüber hinaus eine Multiplikation definieren, so dass die komplexen Zahlen nicht nur einen Vektorraum, sondern ebenso wie die reellen Zahlen einen *Körper*^{***} bilden.

Ausblick: Körper.

Ein Körper ist hier eine algebraische Struktur, die über eine Reihe von Axiomen definiert ist:

Ein Körper K ist eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen $K \times K \rightarrow K$ – genannt Addition und Multiplikation – definiert sind mit den Eigenschaften:

- Additive Eigenschaften:
 - $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)

¹Daher wird die Analysis von Funktionen komplexer Zahlen in der deutschsprachigen Literatur *Funktionentheorie*^{***} genannt.

²In der Praxis wird diese Art der Darstellung praktisch nie benutzt. Wir werden im Folgenden sehr viel bequemere Darstellungen komplexer Zahlen kennenlernen.

- $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
- Es gibt ein Element $0 \in K$, so dass $0 + a = a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element).
- Zu jedem $a \in K$ existiert ein additives Inverses $-a$ ($-a$) + $a = 0$.
- Multiplikative Eigenschaften:
 - $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
 - $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
 - Es gibt ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, so dass $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element).
 - Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ existiert ein multiplikatives Inverses a^{-1} mit $a^{-1} \cdot a = 1$.
- Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Struktur:
 - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Links-Distributivgesetz)
 - $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ für alle $a, b, c \in K$ (Rechts-Distributivgesetz)

In den natürlichen Zahlen hat die Addition kein Inverses, in den ganzen Zahlen hat die Multiplikation kein Inverses. Beides sind also keine Körper. Die rationalen Zahlen hingegen bilden ebenso wie die reellen Zahlen einen Körper. Dies gilt auch für die komplexen Zahlen.

Die additiven Eigenschaften sind gleichbedeutend damit, dass K bezüglich der Addition eine abelsche (oder kommutative) Gruppe*** ist. Ebenso sind die multiplikativen Eigenschaften gleichbedeutend damit, dass $K \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe ist. Gruppen sind ebenso wie Körper eine wichtige algebraische Struktur. In der Physik werden Gruppen insbesondere bei der Beschreibung von Symmetrieeigenschaften benötigt.

Wir können eine komplexe Zahl (x, y) alternativ durch ihren *Betrag*** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Länge des Pfeils in Abb. 7.1) sowie ihr *Argument*, sprich den Polarwinkel

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (7.6)$$

zwischen positiver x -Achse und Pfeil, beschreiben (vgl. Polarkoordinaten). Umgekehrt können wir die kartesischen Koordinaten x und y durch die Polarkoordinaten ausdrücken,

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \varphi, \\ y &= |z| \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Das Produkt $z_1 \cdot z_2$ zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 ist nun darüber erklärt, dass sein Betrag durch $|z_1| \cdot |z_2|$ und sein Polarwinkel durch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ gegeben sind. In Worten ist also der Betrag des Produkts das Produkt der Beträge, der Polarwinkel des Produkts ist aber durch die *Summe* der Polarwinkel gegeben. Diese Definition ist zunächst einmal mit bekannten Eigenschaften der reellen Zahlen konsistent. So gibt das Produkt zweier positiver reeller Zahlen (jeweils Polarwinkel 0) wieder eine positive reelle Zahl mit Polarwinkel 0. Andererseits gibt das Produkt zweier negativer Zahlen (jeweils Polarwinkel π) eine positive reelle Zahl ($\pi + \pi = 2\pi$).

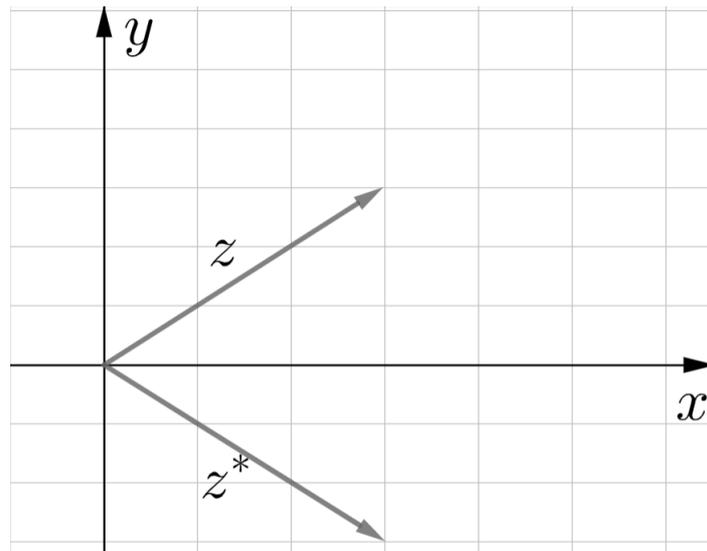
Mithilfe dieser Definition können wir auch unmittelbar sehen, warum man im Rahmen der komplexen Zahlen die Wurzel aus negativen Zahlen ziehen kann. Denn das Quadrat aller auf der imaginären Achse liegenden komplexen Zahlen führt auf eine Zahl auf der negativen reellen Achse.

Nehmen wir z.B. die komplexe Zahl $(0, 1)$. Sie hat den Betrag eins und den Polarwinkel $\pi/2$. Quadrieren wir diese komplexe Zahl, so erhalten wir eine komplexe Zahl, die ebenfalls den Betrag eins hat, aber den Polarwinkel $\pi = \pi/2 + \pi/2$. Diese Zahl können wir also mit (-1) identifizieren! Als Formel erhalten wir

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1. \quad (7.8)$$

Umgekehrt gilt also auch

$$\sqrt{-1} = \pm(0, 1). \quad (7.9)$$

Abbildung 7.2: Darstellung von z und der konjugiert komplexen Zahl z^*

Die komplexe Zahl $(0, 1)$ spielt eine so zentrale Rolle, dass man für sie eine gesonderte Bezeichnung einführt,

$$i = (0, 1). \quad (7.10)$$

Wir können also insbesondere $i^2 = -1$ schreiben.

7.3 Darstellung komplexer Zahlen in algebraischer Form

Die zentrale Rolle von i beruht darauf, dass diese Zahl so etwas wie einen “Einheitsvektor” entlang der imaginären Achse darstellt. Mithilfe von i kann man komplexe Zahlen (x, y) geschickter als

$$z = x + iy \quad (7.11)$$

darstellen. Man schreibt

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

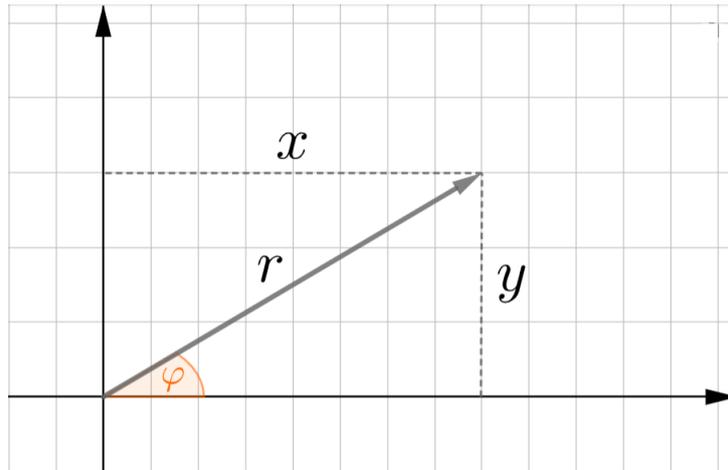
für den *Realteil* und den *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z = x + iy$.

So geschrieben können alle Operationen mit komplexen Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra durchgeführt werden, wenn man nur $i^2 = -1$ beachtet. So gilt z.B. für die Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

und für die Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2). \end{aligned}$$

Abbildung 7.3: Polardarstellung der komplexen Zahl $z = x + iy$

Wir können uns auch noch einmal davon überzeugen, dass die Polarwinkel bei der Multiplikation addiert werden. Benutzen wir die trigonometrischen Additionstheoreme, so finden wir

$$\tan \arg(z_1 z_2) = \frac{y_1 x_2 + x_1 y_2}{x_1 x_2 - y_1 y_2} = \frac{|z_1 z_2|(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{|z_1 z_2|(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)} = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} = \tan(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (7.12)$$

und somit

$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (7.13)$$

in Übereinstimmung mit der geometrischen Definition der Multiplikation komplexer Zahlen.

Die Zahl $z^* = x - iy$ heißt *konjugiert komplex*^{**} zu z , s. Abb. 7.2. Mithilfe der konjugiert komplexen Zahl kann der Betrag von z als $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$ geschrieben werden, da

$$z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Hiermit können wir nun auch die Division z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen berechnen,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt hieraus $1/i = -i$.

Neben der kartesischen Darstellung $z = x + iy$ ist auch die oben bereits eingeführte Polardarstellung komplexer Zahlen ausgesprochen wichtig. In Polarkoordinaten können eine komplexe Zahl $z = x + iy$ auch als

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

schreiben.

Gleich werden wir die sehr wichtige und faszinierende *Eulersche Formel*^{**3}

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (7.15)$$

³Die Eulersche Formel für $\varphi = 2\pi$ führt auf die erstaunliche Relation

$$e^{2\pi i} = 1. \quad (7.14)$$

beweisen, so dass wir die Polardarstellung

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

erhalten. In der Polardarstellung nimmt die komplexe Konjugation die Form

$$z^* = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z|(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = |z|e^{-i\varphi}$$

an.

Die Eulersche Formel stellt einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion her. Insbesondere können wir jetzt die trigonometrischen Funktionen explizit durch die Exponentialfunktion ausdrücken,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}[e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}] \quad (7.16)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i}[e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}]. \quad (7.17)$$

Diese Gleichungen stellen auch einen Zusammenhang mit den hyperbolischen Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] \quad (7.18)$$

$$\sinh \varphi = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]. \quad (7.19)$$

her. Man kann sich leicht von den Relationen

$$\sinh(ix) = i \sin x \quad (7.20)$$

$$\sin(ix) = i \sinh x \quad (7.21)$$

$$\cosh(ix) = \cos x \quad (7.22)$$

$$\cos(ix) = \cosh x \quad (7.23)$$

überzeugen.

Mithilfe der Polardarstellung lässt sich auch der Logarithmus einer komplexen Zahl angeben,

$$\ln z = \ln(|z|e^{i\varphi}) = \ln |z| + i\varphi. \quad (7.24)$$

Aufgrund der Periodizität des Winkels müssen wir eine Konvention treffen, welchen Winkelbereich wir zulassen. Ansonsten ist der Logarithmus nicht eindeutig definiert:

$$\ln(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi$$

$$\ln(-1) = \ln e^{-i\pi} = -i\pi.$$

Man wählt häufig (aber nicht notwendigerweise) den Winkelbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Die Definition der Multiplikation und der Division reduzieren sich unmittelbar auf die Potenzgesetze,

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1 z_2|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\varphi_1}}{|z_2|e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Wählen wir insbesondere $z_1 = e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = e^{i\varphi_2}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Da andererseits

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

ist, können wir dies als einfache rein analytische Ableitung der trigonometrischen Additionstheoreme betrachten, die nun einfach durch Vergleich von Realteil und Imaginärteil folgen.

7.4 Eulersche Formel

Wir schließen diese knappe Einführung in die komplexen Zahlen mit zwei “Beweisen” der Eulerschen Formel. Für den ersten betrachten wir die Funktion $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und bemerken wegen $f'(\varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi$, dass

$$f'(\varphi) = if(\varphi) \quad (7.25)$$

$$f(0) = 1. \quad (7.26)$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung zusammen mit der Anfangsbedingung bestimmt die Funktion $f(\varphi)$ vollständig. Gleichzeitig können wir diese Differentialgleichung samt Anfangsbedingung offenbar auch durch die Funktion $f(\varphi) = e^{i\varphi}$ lösen. Beide Ausdrücke, $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und $f(\varphi) = e^{i\varphi}$, müssen also Darstellungen derselben Funktion sein, woraus die Eulersche Formel (7.15) folgt.

Alternativ können wir für die linke Seite der Eulerschen Formel die Taylor-Reihe hinschreiben und die Terme umorganisieren:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi + \frac{1}{2!}(i\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(i\varphi)^3 + \frac{1}{4!}(i\varphi)^4 + \dots \\ &= 1 + i\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - \frac{i}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + \dots \right] + i \left[\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \dots \right] \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Wir haben angenommen, dass die Reihen genügend schnell konvergieren, so dass wir sie ohne Komplikationen umordnen können. (Weiterhin haben wir natürlich angenommen, dass sich die Taylor-Reihe auch für Funktionen im Komplexen definieren lässt.)

7.5 Aufgaben

Aufgabe 7.1 Komplexe Zahlen

Berechnen Sie für die komplexen Zahlen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_1 \cdot z_2$
- $|z_1|$ and $|z_2|$
- $\arg z_1$ and $\arg z_2$
- z_1^n sowie z_2^n ($n \in \mathbb{N}$)

Aufgabe 7.2 Gleichungen

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an:

- $z^2 = 1$
- $z^2 = -1$
- $z^2 + (1 + i)z + i = 0$
- $z^3 = 1$
- $z^3 = -i$
- $z^4 = -4$

Zeichnen Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 7.3 Real- und Imaginärteil

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen:

- $z_1 = \frac{1}{i}$
- $z_2 = \frac{1}{1 - i\sqrt{3}}$
- $z_3 = \frac{(-2 + 5i) \cdot (1 + 3i)}{2 + 3i} - \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \right)$
- $z_4 = 2e^{i\pi/2}$
- $z_5 = e^{i\pi/6}$
- $z_6 = \ln i$

Zeichnen Sie die Lösungen in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 7.4 Komplexe Zahlenebene

Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit

- $|z - i| < 2$
- $1 < |z| < 3$
- $\frac{3\pi}{4} < \arg z < \pi$
- $\operatorname{Im} z^2 > \operatorname{Im} z$
- $\operatorname{Im} z^2 > 2$

Aufgabe 7.5 Komplexe Summe

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=0}^{2n} i^k k = \begin{cases} n(1-i) & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -(n+1) + ni & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Index

A

abc-Formel	24
Abgeschlossenes Intervall	42
Ableitung	47
abzählbar unendlich	14
Achsenabschnitt	47
Additionstheoreme	28
Ankathete	11
Arcuscosinus	66
Arcuskotangens	67
Arcussinus	64
Arcustangens	67
Area-Funktionen	112

B

Bestimmtes Integral	75
Betragsfunktion	51
Bijektiv	42, 64
Binomialkoeffizient	19
Binomische Formeln	19
Binomischer Lehrsatz	19
Bogenmaß	25
Bruchrechnung	13

C

Cantorsches Diagonalargument	14
------------------------------	----

D

Definitionsbereich	41
Definitionsmenge	41
Determinante	135
Differentiale	68
Differentialgleichung	8
Differenzenquotient	49
Differenzierbarkeit	52
Diracsche δ -Funktion	53
Divergenz	54

E

Ebene	130
Einheitskreis	26
Erste Ableitung	51
Eulersche Formel	145
Eulersche Zahl	33
Exponent	16
Exponentialfunktion	34
Extremstelle	56

F

Fakultät	19
Fermi-Verteilung (Integral)	91
Fläche einer Kugel	94
Fourier-Koeffizient	32
Fourier-Reihe	32

Fundamentalsatz der Algebra 39
 Funktionentheorie 142

G

Gauß-Verfahren 133
 Gaußsche Summenformel 20
 Gebrochenrationale Funktionen 40
 Gegenkathete 11
 Geometrische Reihe 45, 106
 Gerade 47
 Grenzwertsätze 61
 Gruppe 143

H

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 78
 Heaviside-Funktion 52
 Hyperbel 110
 Hyperbelfunktionen 46, 109
 Hyperbelgleichung 111
 Hyperebene 131
 Hypotenuse 11

I

Imaginäre Achse 142
 Imaginärteil 142
 Induktionsanfang 20
 Induktionsschritt 20
 Injektiv 14, 42
 Integralgrenzen 75
 Integrand 75
 Intervall 42
 Irrationale Zahl 16

K

Kathete 11
 Keplersche Gesetze 8
 Kettenregel (Ableitung) 60
 Komplexe Konjugation 145
 Komplexe Zahlen 141
 Komponentendarstellung 122
 Koordinatenform 128
 Kreuzprodukt 125
 Kronecker-Symbol 124
 Krümmung 58
 Körper 142

L

Lineare Algebra 135
 Lineares Gleichungssystem 132
 Logarithmus 24
 Lorentz-Kurve 107

M

Matrix 133
 Mittlere Geschwindigkeit 51
 Momentangeschwindigkeit 51
 Mächtigkeit 14

N

Natürlicher Logarithmus 37
 Newtonsches Gesetz 7
 Normalenform 130
 Normalenvektor 130

O

Offenes Intervall 42

P

Parameterform 128
 Partialbruch 88
 Partialbruchzerlegung 88
 Partielle Integration 81
 Pascalsches Dreieck 20
 Polstelle 54
 Polynomdivision 38
 Potenz 16
 Potenzrechnung 16
 Potenzreihe 103
 pq-Formel 22
 Produktregel (Ableitung) 60

Q

Quadratische Ergänzung 23
 Quadratische Gleichungen 22
 Quotientenregel (Ableitung) 60

R

Rationale Zahlen \mathbb{Q} 13
 Realteil 142
 Reelle Achse 142

Reelle Zahlen \mathbb{R}	16	Wendepunkt	58
Regel von L'Hospital	109	Wertebereich	41
Resultierende Fläche	77	Wertemenge	41
Richtungsvektor	129	Windschief	130
Riemann-Summe	77	Winkelgeschwindigkeit	30
Riemannsches Integral	75	Winkelhalbierende	64
Rotationskörper	93		

S

Satz des Pythagoras	11
Sekante	48
Signum-Funktion	52
Singularitäten	54
Skalar	121
Skalarprodukt	123
Spatprodukt	128
Stammfunktion	78
Steigung	47
Steigungsdreieck	47
Stetigkeit	52
Stützvektor	129
Substitution	84
Summenregel (Ableitung)	60
Summenzeichen	19
Surjektiv	14, 42

T

Tangente	48, 101
Taylor-Reihe	38, 101
Trigonometrie	25
Trigonometrischer Pythagoras	27

U

Umkehrfunktion	37
Umkehrfunktionen	64
Unbestimmtes Integral	78
Uneigentliche Integrale	80

V

Vollständige Induktion	20
Volumen einer Kugel	93
Volumen eines Rotationskörpers	93

W

Weierstraß-Substitution	91
Weierstraßsches Monster	53