Dozent: Prof. Dr. Roland Mitric

Ausgabe: 24.06.2013 Abgabe:

Differentialgleichungen

1. (15 Punkte) In der Vorlesung haben Sie das Euler-Verfahren und das Runge-Kutta Verfahren (2. Ordnung) zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen kennengelernt und implementiert.

   a) Sei $y' = f(x, y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ und h eine feste Schrittweite, so wird die Näherung für die Lösung im $n+1$ Schritt im Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

   Implementieren Sie das Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung und nutzen Sie Ihr Programm um die folgenden Anfangswertprobleme zu lösen.

   b) Bei der Populationsdynamik nach Verhulst wird angenommen, dass die Geburtenrate proportional zur vorhandenen Population $N(t)$ und die Sterberate proportional zum Quadrat von $N(t)$ ist:

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \cdot N(t) - \frac{r}{K} \cdot N(t)^2,$$

   wobei $r = 1/\text{Jahr}$ die Reproduktionsrate und $K = 10000$ die Kapazitätsgrenze ist. Berechnen Sie die Bevölkerungsentwicklung ausgehend vom Anfangswert $N(0) = 10$ für 20 Jahre. Testen Sie die Schrittweiten $h = 0.1$, 0.01 und 0.001 Jahre und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der analytischen Lösung der Differentialgleichung:

$$N(t) = \left[\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}\right]^{-1}.$$

   An welchen Punkten ist der Fehler besonders groß und warum? Wann ist die Kapazitätsgrenze erreicht?

   c) Eine Substanz A zerfalle thermisch nach 2. Ordnung und bei Einwirkung von Sonnenlicht nach 0. Ordnung. Die Änderung der Konzentration $[A]$ wird durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A]^2 - u(t)$$

   beschrieben, wobei $u(t)$ den zeitlichen Verlauf der Sonneneinstrahlungsintensität angibt. Die Reaktion werde bei Sonnenaufgang (6 Uhr, $t = 0$ s) mit der Anfangskonzentration $[A](0) = 1\,\text{mol/l}$ gestartet. Wie groß ist die Konzentration $[A]$ bei Sonnenuntergang (18 Uhr, $t = 43200$ s)? Die Geschwindigkeitskonstante ist $k_2 = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{l/mol·s}$ und die Sonneneinstrahlungsintensität beträgt $u(t) = 10^{-5} \sin\left(\frac{t}{43200s}\right)\,\text{mol/l·s}$.