

Divergenz

Aufgabe grad 1)

Es sei $f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und einem konstanten Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Berechne grad f !

Aufgabe div 1)

Es sei $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2yz^2 \end{pmatrix}$. Berechne $\text{div } \vec{f}(x,y,z)$ und $\text{div } \vec{f}(1,2,3)$!

Aufgabe div 2)

a) Es sei $\vec{f}(x,y,z) = \vec{a}$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ konstant. Berechne $\text{div } \vec{f}$!

b) Es sei $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Skizziere dieses Vektorfeld und berechne $\text{div } \vec{f}$!

c) Es sei $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Skizziere dieses Vektorfeld und berechne $\text{div } \vec{f}$!

d) Diskutiere mit deinem Nachbarn, was die Ergebnisse von a), b) und c) für eine anschauliche Bedeutung haben!

Tipp: Statt „Divergenz“ sagt man auch oft „Felderzeugung“ oder „Quellstärke des Feldes“!

Aufgabe div 3)

Es sei $\vec{f}(x,y,z) = \frac{c}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$ konstant. Berechne $\text{div } \vec{f}$!

Tipp: Nach Berechnung von $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ können $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial f_3}{\partial z}$ durch Analogiebetrachtungen erschlossen werden.

Anm.: Ersetzt man $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ durch r bzw. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ durch \vec{r} und schreibt $\vec{f}(\vec{r}) = \frac{c}{r^3} \vec{r} = \frac{c}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$,

so erkennt man, dass das Vektorfeld \vec{f} dem Coulomb- bzw. dem Gravitationsfeld entspricht - je nach Wahl der Konstanten c . Hierbei ist „ c “ aber nur in dem Sinne konstant, als dass es nicht vom Ort abhängt und daher bezüglich der partiellen Ableitungen nach x , y und z als Konstante gilt. „ c “ kann weiterhin von den Ladungen q und Q bzw. von den Masse m und M abhängen!

Literatur:

Merziger / Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik, Binomi-Verlag 2006

Skalar- und Vektorfelder / Differentialoperatoren: S. 522 bis 538

Aufgaben: div 1 = REP 18.37