Jörg Fandrich

Flussintegral

Aufgabe Flussint 1)

Es sei $\vec{f}$ ein „konstantes Strömungsfeld in y-Richtung", d.h. $\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$ konstant.

a) Die Fläche F_1 sei gegeben durch

$$F_1 = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2 \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; -1 \le u \le 1 \;\wedge\; -1 \le v \le 1 \right\}.$$

Berechne den Fluss $\Phi_1 = \iint_{F_1} \vec{f} \bullet d\vec{F}$!

b) Die Fläche F_2 sei gegeben durch

$$F_2 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ 2+v \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; -1 \le u \le 1 \;\wedge\; -1 \le v \le 1 \right\}.$$ Berechne den Fluss $\Phi_2 = \iint_{F_2} \vec{f} \bullet d\vec{F}$!

c) Die Fläche F_3 sei gegeben durch $F_3 = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} u \\ 2+v \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; -1 \le u \le 1 \;\wedge\; -\frac{1}{\sqrt{2}} \le v \le \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$

Berechne den Fluss $\Phi_3 = \iint_{F_3} \vec{f} \bullet d\vec{F}$!

d) Skizziere das Vektorfeld sowie die Flächen F_1, F_2 und F_3.

e) Überlege, ob die Ergebnisse deinen Erwartungen entsprechen! Diskutiere ggf. mit deinem Nachbarn! Veranschauliche mit konkreten Zahlen: Es sei c = 3 m/s, die Einheit der in den Parametrisierungen auftretenden Strecken sei Meter (m).
Welches Flüssigkeitsvolumen fließt pro Zeiteinheit durch die Flächen?

Aufgabe Flussint 2)

Ein Vektorfeld $\vec{f}$ und eine Fläche F seien gegeben durch:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix} \text{ und } F = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi) \\ y(\rho,\varphi) \\ z(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \le \rho \le 2 \;\wedge\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

a) Skizziere die Fläche F!

b) Berechne den Fluss $\Phi = \iint_F \vec{f} \bullet d\vec{F}$!

<u>Tipp:</u> Durch Wahl geeigneter Koordinaten vereinfacht sich $\vec{f}(\vec{r})$ ganz erheblich!

<u>Anm.:</u> Aufgabenteil b) ist von Teil a) unabhängig – man braucht keine räumliche Vorstellung von F, um den Fluss formal zu berechnen. Bei vielen Problemen in der Physik hilft ein räumliches Vorstellungs-vermögen jedoch sehr – beispielsweise, wenn man Flächen selbst parametrisieren muss!

<u>Literatur:</u> **Merziger / Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik, Binomi-Verlag 2006**
Flächen im Raum: S. 511 – 522 ; Oberflächenintegrale: S. 546 – 549