Der Satz von Stokes

Aufgabe Stokes 1)

Ein Vektorfeld sei bestimmt durch $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \lambda \cdot z \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathrm{IR}$ konst. und K sei ein Kreis um die z-Achse in Höhe h (also: z = h mit $h \in \mathrm{IR}$ konst.).
Verifiziere den Satz von Stokes für dieses Beispiel, d.h. berechne die entsprechenden Integrale und überprüfe, ob sie das gleiche Ergebnis liefern

Aufgabe Stokes 2)

Ein Vektorfeld sei bestimmt durch $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}$

und eine Fläche F sei definiert durch $F = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{IR}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \;\wedge\; y \geq 0 \;\wedge\; z \geq 0 \right\}$.

a) Um was für eine Fläche handelt es sich?
   Beschreibe in Worten oder durch eine Skizze!
b) Verifiziere den Satz von Stokes für dieses Beispiel!

Aufgabe Stokes 3)

Deute die Maxwellschen Gleichungen (im Vakuum)

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad , \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{und} \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes! Argumentiere so anschaulich wie möglich!

Anmerkung:
(1) Der Vollständigkeit halber sei hier noch die vierte Maxwellsche Gleichung (im Vakuum) erwähnt: $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 (\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j})$.
(2) Im allgemeinen Fall müsste man zwischen $\vec{D}$- und $\vec{E}$-Feld sowie zwischen $\vec{B}$- und $\vec{H}$-Feld unterscheiden. Für den Fall des Vakuums vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen jedoch zu der oben aufgeführten Form.

Literatur:

Merziger / Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik, Binomi-Verlag 2006
Integralsätze der Vektoranalysis, S. 550 bis 558

Aufgaben: Stokes 2 = REP 18.67