

Dreifachintegrale (2)

Aufgabe Df-I 4)

Der Körper K sei gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1 \wedge y \leq x \right\} .$$

- Wie sieht dieser Körper anschaulich aus?
- Berechnet das Integral $\iiint_K (2x + y + z) dV$!

Aufgabe Df-I 5)

Es sei K eine Kugel mit dem Radius R, deren Massendichte ρ linear mit dem Abstand vom Kugelmittelpunkt r von 0 auf 1 zunimmt.

- Stelle für die Dichte die entsprechende Funktionsgleichung ($\rho = \rho(r)$) auf!
- Berechne die Masse dieser Kugel!
- Berechne ihr Trägheitsmoment bei Rotation um eine Mittelpunktsachse!

Aufgabe Df-I 6) (Zusatzaufgabe)

Es sei K die Einheitskugel (d.h. ein Kugel mit Radius 1 und dem Ursprung als Mittelpunkt).

- Berechnet das Integral $\iiint_K xyz dV$!
- Hätte man das Ergebnis vorher „sehen“ können? Erkläre!

Literatur:

Merziger / Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik, Binomi-Verlag 2006
Dreifachintegrale: S. 490 bis 498
Kugel- und Zylinderkoordinaten: F2 und S. 530 bis 538

Aufgaben: Df-I 5 = REP 17.13 & 17.16, Df-I 6 = REP 17.11