

7. Holographie

Die Holographie ist ein 1948 von *Dennis Gabor* (1900–1972) beschriebenes Verfahren zur dreidimensionalen Abbildung von Gegenständen [7.1]. Wegen der hohen Anforderungen an die Kohärenz der Lichtquelle gewann die Holographie allerdings erst mit der Entwicklung des Lasers größere Bedeutung. Meßtechnische Anwendung hat die Holographie vor allem in der holographischen Interferometrie gefunden, da nunmehr beliebige, diffus streuende Objekte einer interferometrischen Vermessung zugänglich werden. In der optischen Datenverarbeitung werden zunehmend digitale Hologramme und holographisch optische Elemente verwendet. Damit lassen sich z.B. Datenkanäle vervielfachen und optische Verbindungen auf und zwischen Prozessorchips realisieren. Eine andere Anwendung: die Fälschung von Scheckkarten wird durch ein in die Karte eingearbeitetes Hologramm erschwert. Auch die Kunst hat die Holographie als ein Gestaltungselement entdeckt.

7.1 Das Prinzip der Holographie

Bei der üblichen Photographie wird nur die Intensität des Lichtwellenfeldes eines Objektes aufgezeichnet. Dabei muß das Objekt abgebildet werden. Üblicherweise wird inkohärentes Licht benutzt. Bei kohärentem Licht treten je nach Blende verschieden große Speckel auf. Bei der Aufzeichnung geht die Phaseninformation der Lichtwelle verloren. Diese kann daher auch nicht zurückerhalten werden. Im Gegensatz dazu wird bei der Holographie Amplitude und Phase einer Lichtwelle durch Hinzufügen einer Referenzwelle aufgezeichnet. Das Objekt muß dazu nicht eigens abgebildet werden. Es wird aber kohärentes Licht benötigt, damit eine feste Phasenbeziehung zwischen Referenz- und Objektwelle vorhanden ist. Die Phase wird dann im Interferenzmuster kodiert aufgezeichnet, und zwar, ähnlich wie wir es beim Youngschen Interferenzversuch kennengelernt haben, in der Lage der Interferenzstreifen. Es ist das Verdienst von *Dennis Gabor* gezeigt zu haben, daß die ursprüngliche Welle sehr einfach durch Beleuchten des Interferenzmusters mit der zur Aufnahme verwendeten Referenzwelle zurück erhalten werden kann.

Der prinzipielle optische Aufbau zur Aufnahme eines Hologramms ist in Abb. 7.1 skizziert. Das holographisch aufzunehmende Objekt wird mit kohärentem Licht beleuchtet. Das vom Objekt gestreute Licht wird auf einer hochauflösenden Photoplatte, dem späteren Hologramm, zusammen mit einer Referenzwelle aufgenommen.

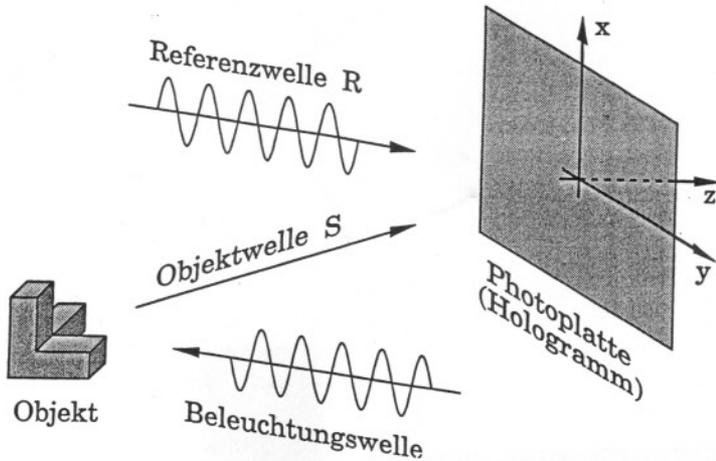


Abb. 7.1. Prinzipieller Aufbau zur Aufnahme eines Hologramms.

Zur theoretischen Beschreibung muß man wegen der Kohärenz des verwendeten Lichtes die Signalwelle S und die Referenzwelle R am Ort der Hologrammplatte amplitudenmäßig überlagern und aus der Summe der Amplituden die Intensität bilden. Diese wird dann aufgezeichnet. An einem Punkt (x, y) der Hologrammplatte ergibt sich also als elektrische Feldstärke

$$E(x, y, t) = S(x, y, t) + R(x, y, t). \quad (7.1)$$

Benutzen wir monofrequentes Licht, d.h. $R(x, y, t) = R(x, y)e^{-i\omega t}$ als Referenzwelle, und ein sich während der Belichtungszeit nicht veränderndes Objekt, d.h. $S(x, y, t) = S(x, y)e^{-i\omega t}$, so ergibt sich sehr einfach für die Intensität

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |R(x, y) + S(x, y)|^2 = (R + S)(R + S)^* \\ &= RR^* + SS^* + R^*S + RS^*. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Das Photomaterial reagiert auf die gesamte während der Belichtungszeit t_B empfangene Energie pro Flächeneinheit und setzt diese durch den Entwicklungsprozeß in eine Schwärzung und Brechungsindexänderung um. Die Belichtung B [Energie/Fläche] ist gegeben durch

$$E(x, y) = \int_0^{t_B} I(x, y, t) dt = \int_0^{t_B} E(x, y, t)E^*(x, y, t) dt. \quad (7.3)$$

Die Belichtung führt zu einer komplexen Amplitudentransmission des Negativs. Der komplexe Amplitudentransmissionsgrad τ ist analog zur Definition der Amplitudentransmission eines Spiegels (5.2) beim Fabry-Perot-Interferometer bestimmt durch

$$\tau = \frac{E_a}{E_e} = Te^{i\varphi} = |\tau|e^{i\varphi}. \quad (7.4)$$

Dabei ist E_a die auslaufende Welle unmittelbar hinter der entwickelten Photoplatte und E_e die einfallende Lichtwelle. Der komplexe Amplitudentransmissionsgrad ist im allgemeinen eine Funktion des Ortes auf der Photoplatte,

$$\tau = \tau(x, y) = T(x, y)e^{i\varphi(x, y)}. \quad (7.5)$$

Bei der Aufzeichnung von Hologrammen unterscheidet man zwei Grenzfälle, das Amplitudenhologramm ($\varphi = \text{const}$) und das Phasenhologramm ($T = \text{const}$). In beiden Fällen kann man die gesamte Information über das Wellenfeld speichern, wobei aber das Phasenhologramm den prinzipiellen Vorzug hat, im Idealfall kein Licht zu absorbieren und bei der Bildrekonstruktion ein helleres Bild zu liefern.

Beim Amplitudenhologramm benutzt man ein Entwicklungsverfahren für die belichtete Photoplatte, die den in Abb. 7.2 angegebenen Verlauf für den reellen Amplitudentransmissionsgrad T als Funktion der Belichtung B ergibt.

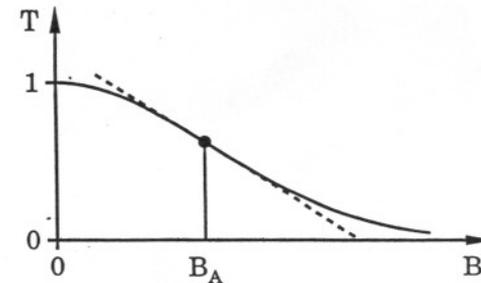


Abb. 7.2. Amplitudentransmission einer holographischen Platte als Funktion der Belichtung.

Man arbeitet bei holographischen Aufnahmen im linearen Teil der Kennlinie um den Arbeitspunkt B_A der Belichtung. Dort kann man die Transmissionskennlinie durch eine Gerade $T = a - bB$ annähern. Bei zeitlich konstanter Intensität $I(x, y)$ erhält man wegen $B = It_B$

$$T = a - bIt_B. \quad (7.6)$$

Die Konstanten a und b sind dabei von den Eigenschaften des Photomaterials und vom Entwicklungsprozeß abhängig.

Die Photoplatte speichert also beim Amplitudenhologramm die reelle Transmissionsverteilung

$$T(x, y) = a - bt_B(RR^* + SS^* + R^*S + RS^*)(x, y). \quad (7.7)$$

Bei Phasenhologrammen ergibt sich durch den Entwicklungsprozeß eine reelle Phasentransmissionskurve $\varphi(B)$, deren Form in Abb. 7.3 skizziert ist. In der Umgebung des Arbeitspunktes B'_A kann man wieder eine li-

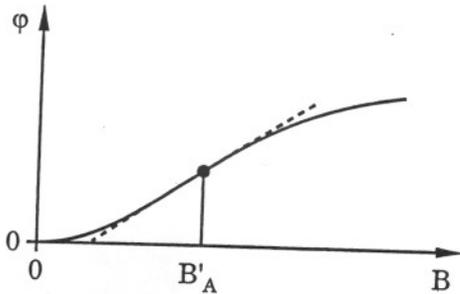


Abb. 7.3. Phasentransmissionskurve einer holographischen Platte.

neare Näherung ansetzen,

$$\varphi(I) = a' + b't_B I. \quad (7.8)$$

Die Transmission der Photoplatte ergibt sich dann zu

$$\tau = e^{i\varphi(I)}, \quad (7.9)$$

ist also nichtlinear von der Intensität I abhängig. Ist $\varphi(I) \ll \pi/2$, so kann man in (7.9) die Exponentialfunktion entwickeln und nach dem linearen Glied abbrechen:

$$\tau = e^{i\varphi(I)} \approx 1 + i\varphi(I) \approx (1 + ia') + ib't_B(RR^* + SS^* + R^*S + RS^*). \quad (7.10)$$

Man erhält also wieder, bis auf andere Konstanten, einen Ausdruck analog zu (7.7) beim Amplitudenhologramm.

7.1.2 Die Bildrekonstruktion

Zur Wiedergabe des Bildes des Objektes (Bildrekonstruktion) wird das Hologramm mit dem Referenzstrahl als Rekonstruktionsstrahl beleuchtet. Dabei wird die Referenzwelle $R(x, y)e^{-i\omega t}$ mit dem Transmissionsgrad $\tau(x, y)$ moduliert. Beim Amplitudenhologramm erhält man als Feldverteilung direkt hinter der Hologrammfläche für die komplexen Amplituden

$$E_a(x, y) = T(x, y)E_e = T(x, y)R \\ = Ra - bt_B R(RR^* + SS^* + R^*S + RS^*). \quad (7.11)$$

Es ergeben sich vier Terme, die folgende Bedeutung haben:

1. $(a - bt_B|R|^2)R \sim R$ Nullte Beugungsordnung, die Referenzwelle ist mit einem konstanten Faktor multipliziert,
2. $bt_B|S|^2R$ mit $|S|^2$ (üblicherweise ein Speckelmuster) modulierte, verbreiterte nullte Ordnung,
3. $bt_B|R|^2S \sim S$ direktes Bild (virtuell),
4. $bt_B R^2 S^*$ konjugiertes Bild (reell).

Der dritte Term ist, bis auf einen bei ebener Referenzwelle konstanten Faktor, die ursprüngliche Objektwelle S . Diese ist also durch die Hologrammaufnahme und Wiedergabe mit der Referenzwelle R rekonstruiert worden. Um die Objektwelle S unverfälscht zu erhalten, ist natürlich dafür Sorge zu tragen, daß die übrigen drei Wellen nicht stören. Dies bereitete Gabor, dem Erfinder der Holographie, noch Schwierigkeiten, da er wegen der geringen Kohärenz des ihm zur Verfügung stehenden Lichtes nur sogenannte "in-line" Hologramme (Sichtlinienhologramme) aufnehmen konnte, d.h. Hologramme, bei denen die Objektwelle und die ebene Referenzwelle praktisch dieselbe Ausbreitungsrichtung senkrecht zur Hologrammfläche haben (siehe Abschnitt 7.3.1). Heute kann man mit Hilfe geeigneter Laserlichtquellen jeden Winkel zwischen Objekt- und Referenzwelle realisieren. Voraussetzung ist eine hinreichend große Kohärenzlänge bzw. eine geeignete Kohärenzfunktion des verwendeten Lichts.

Der vierte Term erzeugt ebenfalls ein Bild, das sogenannte konjugierte Bild, das eng mit dem Bild des Objektes zusammenhängt. Es ist reell und pseudoskopisch, d.h. das Objekt kann nur in der Blickrichtung von hinten nach vorn betrachtet werden. Ein pseudoskopisches Bild zeigt seltsame Parallaxeneigenschaften. Versucht man, mehr von oben auf eine Fläche des Objektes zu blicken, so kippt die Fläche in der umgekehrten Richtung als erwartet weg, und man sieht sie unter einem kleineren Winkel. Auch können bei Blickrichtungsänderungen durch Kopfbewegungen offensichtlich in größerer Tiefe liegende Bildteile im Vordergrund liegende Bildteile verdecken. Das hat seinen Grund natürlich darin, daß im ursprünglichen Bild die jetzt in größerer Tiefe liegenden Bilder im Vordergrund liegen. Ein pseudoskopisches Bild erscheint wie in sich umgestülpt.

Rekonstruiert man ein Bild mit Hilfe eines Phasenhologramms, so gilt entsprechend

$$E_a(x, y) = \tau(x, y)R = e^{i\varphi(I(x, y))}R \approx (1 + i\varphi(I(x, y)))R \\ \approx (1 + ia')R + ib't_B R(RR^* + SS^* + R^*S + RS^*). \quad (7.12)$$

Auch hier erhalten wir also wieder die vier obigen Terme. Bei Phasenhologrammen sind aber wegen der zusätzlichen Näherung von $e^{i\varphi}$ durch $1+i\varphi$ die nichtlinearen Effekte grundsätzlich ausgeprägter als bei Amplitudenhologrammen. Da sie zudem lichtstärker sind als Amplitudenhologramme, machen sich bei ihnen die Nichtlinearitäten deutlicher bemerkbar. Dies führt leicht zu zusätzlichen Bildern in höheren Beugungsordnungen.

7.1.3 Die Lage der Bilder

Die bei der Rekonstruktion auftretenden Bilder findet man in den in Abb. 7.4 dargestellten Richtungen. Bei senkrecht auf das Hologramm einfallender Referenzwelle und Rekonstruktionswelle ($\alpha=0$) vereinfacht sich ihre Anordnung, wie in Abb. 7.5 dargestellt.

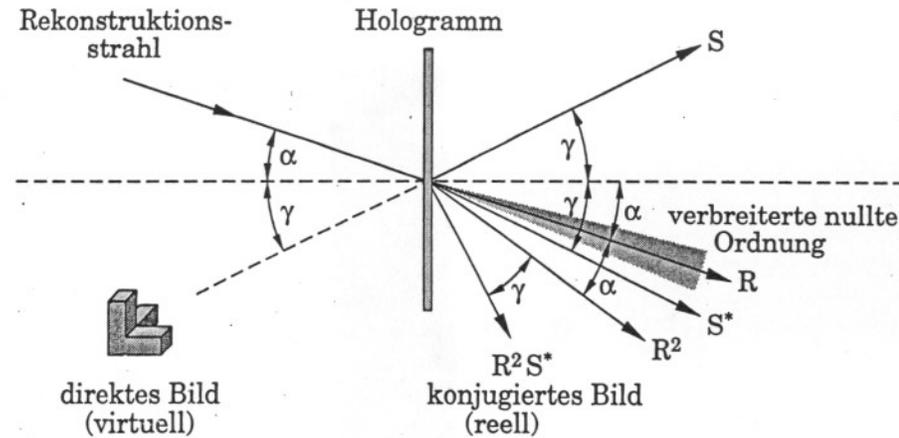


Abb. 7.4. Zur Lage der Bilder bei der Rekonstruktion für kleine Einfallswinkel α und γ (α, γ hier übertrieben groß).

Aus der Konstruktion erkennt man, daß das direkte Bild virtuell ist. Man sieht es, indem man durch das Hologramm wie durch ein Fenster hindurchblickt, hinter dem Hologramm. Das konjugierte Bild dagegen ist reell. Es liegt vor dem Hologramm und kann mit einer Mattscheibe aufgefangen werden.

Die in den beiden Abbildungen angegebenen Bildrichtungen folgen unmittelbar aus den zu den Bildern gehörenden mathematischen Operationen. Wenn wir für S der Einfachheit halber eine unter dem Winkel γ einfallende, ebene Welle annehmen und den allen Termen gemeinsamen Faktor e^{-iat} weglassen, erhalten wir für S^* :

$$S = e^{ikx \sin \gamma} \rightarrow S^* = e^{-ikx \sin \gamma} = e^{ikx \sin(-\gamma)}. \quad (7.13)$$

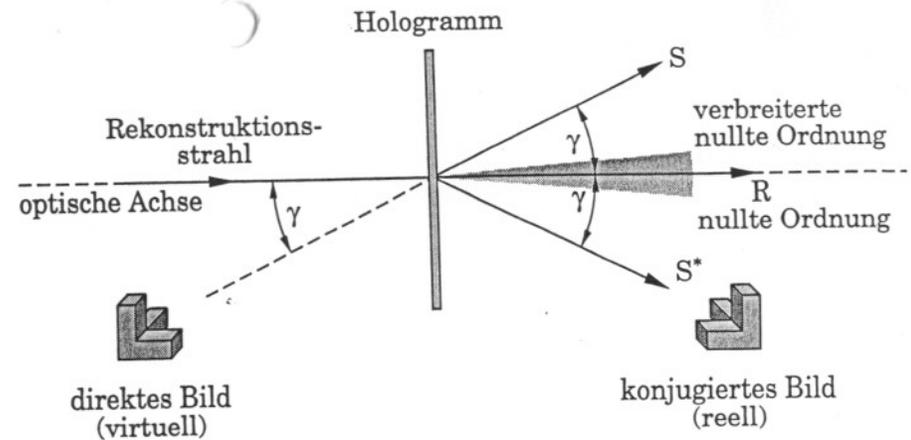


Abb. 7.5. Lage der Bilder bei senkrechtem Referenz- und Rekonstruktionsstrahl.

Man kann S^* demnach als eine Welle interpretieren, die das Hologramm unter dem Winkel $-\gamma$ verläßt.

Auch für den Referenz- bzw. Rekonstruktionsstrahl R wollen wir eine ebene Welle $R = e^{ikx \sin \alpha}$ annehmen. Sie trifft unter dem Winkel α auf die Hologrammplatte auf. Für den Term R^2 ergibt sich damit

$$R^2 = e^{ikx 2 \sin \alpha} = e^{ikx \sin \alpha'}. \quad (7.14)$$

Bei kleinen Einfallswinkeln α ist $\alpha' = 2\alpha$. Dieser Fall ist in Abb. 7.4 angenommen, wobei nur zur besseren Darstellung die Winkel α und γ groß gewählt wurden.

Für die Welle $R^2 S^*$ erhält man dann wegen (7.13) und (7.14)

$$R^2 S^* = e^{ikx 2 \sin \alpha} e^{ikx \sin(-\gamma)} = e^{ikx(2 \sin \alpha + \sin(-\gamma))}. \quad (7.15)$$

Setzen wir $R^2 S^* = e^{ikx \sin \beta}$, so ergibt sich für die auslaufende Welle des konjugierten Bildes

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha + \sin(-\gamma). \quad (7.16)$$

Wachsen α oder γ an, so wird das konjugierte Bild mehr und mehr verzerrt, bis es für

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha + \sin(-\gamma) > 1 \quad (7.17)$$

keinen Winkel β mehr gibt, der diese Bedingung erfüllen kann. Dann verschwinden diese Teile des konjugierten Bildes.

7.1.4 Phasenkongjugation

Wir haben im vorigen Abschnitt mehrfach konjugiert komplexe Amplituden (R^* , S^*) benutzt. Diesen komplexen Amplituden haben wir Lichtwellen zugeordnet, die uns bei S^* beispielsweise das konjugierte Bild liefern. Dies ist ein Beispiel für eine sogenannte phasenkongjugierte Welle. Zu ihrer Definition betrachten wir der Einfachheit halber eine eindimensionale, ebene Welle, die sich in z -Richtung ausbreitet:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} \\ &= E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die zugehörige phasenkongjugierte Welle ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{pc}(z, t) &= E_0^* e^{-ikz} e^{-i\omega t} \\ &= E_0^* e^{i(-kz - \omega t)}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Sie unterscheidet sich von der komplex konjugierten Welle (c.c.) dadurch, daß nur der räumliche Anteil komplex konjugiert wird. Eine phasenkongjugierte Welle ist also mathematisch durch eine sehr einfache Operation zu erhalten. Physikalisch ist eine phasenkongjugierte ebene Welle nichts anderes als die in die entgegengesetzte Richtung laufende ebene Welle.

Größere Bedeutung haben phasenkongjugierte Wellen erlangt, seit man praktisch in Echtzeit ein einfallendes Lichtwellenfeld phasenkongjugieren kann. Eine Realisation, ein sogenannter phasenkongjugierender Spiegel, kann durch Vier-Wellen-Mischen in einem nichtlinearen, sogenannten photorefraktiven Kristall, z.B. LiNbO_3 , BaTiO_3 , $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), erfolgen (Abb. 7.6). Für diese Spiegel gilt das gewohnte Reflexionsgesetz nicht (Abb. 2.3, Abb. 7.7).

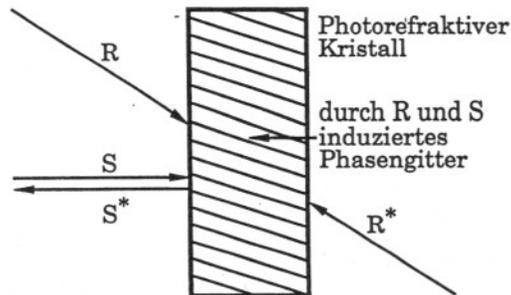


Abb. 7.6. Realisation eines phasenkongjugierenden Spiegels durch Vier-Wellen-Mischen in einem photorefraktiven Kristall.

Wird eine Wellenfront z.B. durch Inhomogenitäten des Brechungsindex verformt, so durchläuft die phasenkongjugierte Welle die gleichen Inhomogenitäten in entgegengesetzter Richtung und wird dadurch in ihrer

ursprünglichen Form wiederhergestellt. Mit phasenkongjugierenden Spiegeln können somit Aberrationen korrigiert werden. Abbildung 7.7 illustriert die Wirkungsweise der Abberationskorrektur.

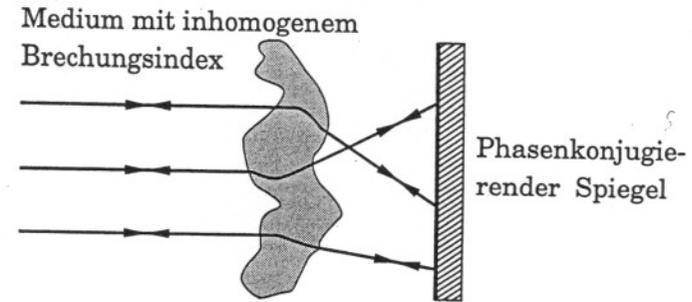


Abb. 7.7. Zur Wirkungsweise der Abberationskorrektur eines phasenkongjugierenden Spiegels.

Die Holographie gestattet es, phasenkongjugierte Wellen zu erzeugen. Hat man als Referenzwelle R eine ebene Welle gewählt, so ist die phasenkongjugierte Referenzwelle R^* relativ leicht als gegenläufige Welle zu erhalten. Beleuchtet man das Hologramm mit R^* als Rekonstruktionswelle, so erhält man

$$E_a = T(x, y)R^* = R^* a - bt_B R^*(RR^* + SS^* + R^*S + RS^*). \quad (7.20)$$

Man erkennt, daß jetzt der letzte Term, $\sim |R|^2 S^*$, unverzerrt die konjugierte Objektwelle S^* rekonstruiert. Am einfachsten realisiert man die konjugierte Referenzwelle, indem man das Hologramm um 180° dreht (Abb. 7.8). Ein Vergleich mit der Aufnahmegeometrie zeigt, daß die Welle S^* vom Hologramm ausgehend zum Ort des ursprünglichen Objekts zurückläuft.

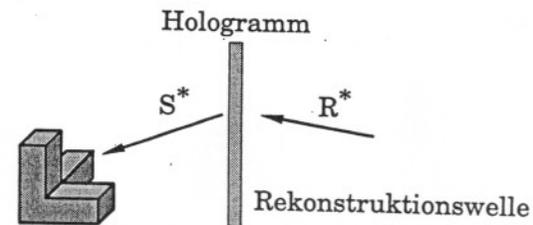


Abb. 7.8. Rekonstruktionsgeometrie mit der phasenkongjugierten Referenzwelle als Rekonstruktionswelle.

7.2 Die Abbildungsgleichungen der Holographie

Wir hatten bisher bei der Rekonstruktion von Bildern eines Hologramms stets wieder die gleiche geometrische Anordnung wie bei der Aufnahme verwendet. Die einzige Ausnahme bildete die eben betrachtete Rekonstruktion mit der konjugierten Referenzwelle. Es ist sicherlich eine wichtige Frage, wie genau die Aufnahmegeometrie eingehalten werden muß, um noch ein gutes Bild bei der Rekonstruktion zu erhalten. Man kann erwarten, daß das Bild nicht sofort verschwindet, wenn die Referenzwelle etwas verändert wird, z.B. wenn bei ebener Referenzwelle der Aufnahmewinkel zur Hologrammplatte bei der Rekonstruktion nicht genau eingehalten wird. Die dabei geltenden Gesetzmäßigkeiten werden von den sogenannten holographischen Abbildungsgleichungen erfaßt.

Zur Ableitung der Abbildungsgleichungen betrachtet man zweckmäßigerweise Hologramme eines Punktes. Das Bild eines ausgedehnten Objektes kann bezüglich Lage und Verformung durch die Ermittlung der Bilder mehrerer seiner Punkte bestimmt werden.

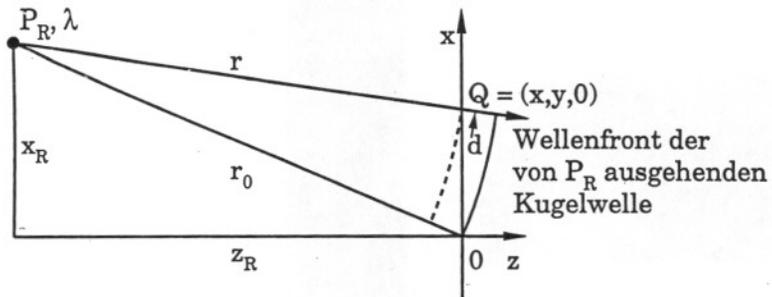


Abb. 7.9. Zur Berechnung der Phasenvariation einer Kugelwelle in einer Ebene.

Grundlage für die Berechnung der Abbildungsgleichungen der Holographie bildet die Phasenvariation einer Kugelwelle in der Ebene des Hologramms ((x, y, 0)-Ebene) in Abhängigkeit von der Lage eines Punktes P_R (Abb. 7.9). Der Punkt P_R ist dabei Ausgangspunkt einer Kugelwelle und wird später Ausgangspunkt der Referenzwelle sein. Er hat die Koordinaten (x_R, y_R, z_R). Eine ebene Welle wird dabei im Grenzfall z_R → ∞ bei x_R/z_R, y_R/z_R = const. erhalten. Die Phasenvariation über die Hologrammfläche kommt durch die unterschiedlichen Laufwege von P_R zu den verschiedenen Punkten der Hologrammfläche zustande. Nehmen wir die Phase im Ursprung als Referenzphase, so ist die Phase an einem Punkt Q = (x, y, 0) gegeben durch die Laufwegdifferenz d = r - r_0 zu

$$\begin{aligned} \varphi_R(x, y, 0) &= kd = k(\overline{P_R Q} - \overline{P_R O}) \\ &= k \left(\sqrt{(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2 + z_R^2} - \sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} \right) \end{aligned}$$

$$= k|z_R| \left(\sqrt{1 + \frac{(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2}{z_R^2}} - \sqrt{1 + \frac{x_R^2 + y_R^2}{z_R^2}} \right). \quad (7.21)$$

Für achsennahe Strahlen kann man die Näherung |x_R|, |y_R|, |x|, |y| ≪ |z_R| einführen. Dann kann man die Wurzel in eine Potenzreihe entwickeln und nach den ersten Gliedern abbrechen. Dies ergibt, da man |z_R| durch z_R ersetzen darf, ohne am Endergebnis etwas zu ändern:

$$\begin{aligned} \varphi_R(x, y, 0) &= k \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx_R - 2yy_R}{z_R} - k \frac{1}{8z_R^3} (x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4x^3x_R \\ &\quad - 4y^3y_R - 4x^2y y_R - 4xy^2x_R + 6x^2x_R^2 + 6y^2y_R^2 + 2x^2y_R^2 \\ &\quad + 2y^2x_R^2 + 8xyx_Ry_R - 4xx_R^3 - 4yy_R^3 - 4xx_Ry_R^2 - 4yx_R^2y_R) \\ &\quad + \text{höhere Terme } (\mathcal{O}(z_R^{-5})). \end{aligned} \quad (7.22)$$

In erster Näherung variiert die Phase einer Kugelwelle mit Ursprung im Punkt (x_R, y_R, z_R) in der Ebene z = 0 wie

$$\varphi_R(x, y, 0) = k \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx_R - 2yy_R}{z_R}. \quad (7.23)$$

Die weiteren Terme in (7.22) sind Aberrationsterme. Mit der von P_R ausgehenden Kugelwelle als Referenzwelle werde eine Objektwelle aufgenommen. Als Objekt nehmen wir eine vom Punkt P_S ausgehende Kugelwelle (Abb. 7.10).

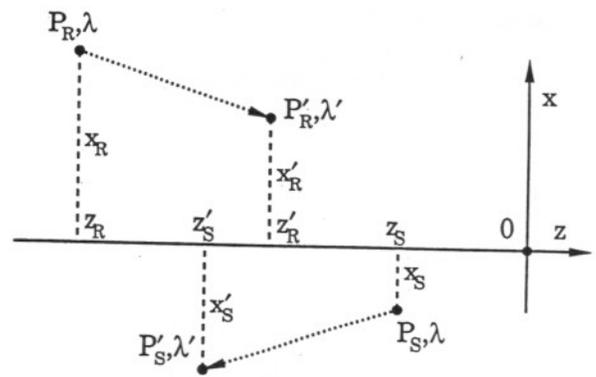


Abb. 7.10. Die beiden Kugelwellen bei der Aufnahme des Hologramms.

Für die Phasenvariation der von P_S ausgehenden Kugelwelle in der (x, y)-Ebene gilt analog zu (7.22) in erster Näherung

$$\varphi_S(x, y, 0) = k \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx_S - 2yy_S}{z_S}. \quad (7.24)$$

Das so aufgenommene Punkthologramm soll jetzt nicht mit einer von P_R ausgehenden Kugelwelle der Wellenzahl k (Wellenlänge λ), sondern mit einer Kugelwelle, ausgehend von P'_R , der Wellenzahl k' (Wellenlänge λ') beleuchtet werden. Zunächst gilt für die Phasenvariation dieser Kugelwelle in der $(x, y, 0)$ -Ebene in erster Näherung analog zu den bisherigen Betrachtungen

$$\varphi'_R(x, y, 0) = k' \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx'_R - 2yy'_R}{z'_R} \quad (7.25)$$

Wir fragen, wohin dann der Punkt P_S wandert. Diesen Punkt nennen wir P'_S . Zunächst wissen wir, daß es zwei Bilder geben wird, die an den Stellen $P'_{S,d}$ (direktes Bild) und $P'_{S,k}$ (konjugiertes Bild) liegen mögen, von denen allerdings eventuell nur eines existiert. Ihre Lage gewinnen wir aus der Betrachtung der holographischen Rekonstruktionsterme. Zu dem Bildpunkt $P'_{S,d}$ gehört in der Ebene des Hologramms eine Lichtwelle S'_d . Sie wird gegeben durch den Rekonstruktionsterm für das direkte, meist virtuelle Bild

$$S'_d \sim R'R^*S. \quad (7.26)$$

Bei Rekonstruktion mit der identischen Referenzwelle R lautete dieser Term früher $S_d \sim RR^*S = |R|^2S$. Das zweite Bild ist gegeben durch folgenden Term für das konjugierte, meist reelle Bild

$$S'_k \sim R'RS^*. \quad (7.27)$$

Die zugehörigen Phasen $\varphi'_{S,d}(x, y, 0)$ und $\varphi'_{S,k}(x, y, 0)$ sind gegeben durch die Summe der Phasen der Wellen R', R^* und S bzw. R', R und S^* , also

$$\varphi'_{S,d}(x, y, 0) = \varphi'_R - \varphi_R + \varphi_S, \quad (7.28)$$

$$\varphi'_{S,k}(x, y, 0) = \varphi'_R + \varphi_R - \varphi_S. \quad (7.29)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Abbildungsgleichungen, d.h. den Zusammenhang zwischen den Koordinaten der vier Punkte P_R, P'_R, P_S und P'_S , durch Einsetzen der Ausdrücke für φ'_R, φ_R und φ_S , Zusammenfassen der Terme in der Schreibweise einer Kugelwelle und Koeffizientenvergleich. Für die Phase des direkten Bildes ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi'_{S,d} &= \varphi'_R - \varphi_R + \varphi_S \\ &= k' \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx'_R - 2yy'_R}{z'_R} \\ &\quad - k \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx_R - 2yy_R}{z_R} \\ &\quad + k \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx_S - 2yy_S}{z_S} \end{aligned} \quad (7.30)$$

oder, mit $m = k/k' = \lambda'/\lambda$,

$$\begin{aligned} \varphi'_{S,d} &= k' \frac{1}{2} \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{z'_R} - \frac{m}{z_R} + \frac{m}{z_S} \right) - 2x \left(\frac{x'_R}{z'_R} - \frac{mx_R}{z_R} + \frac{mx_S}{z_S} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2y \left(\frac{y'_R}{z'_R} - \frac{my_R}{z_R} + \frac{my_S}{z_S} \right) \right] \\ &= k' \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2 - 2xx'_{S,d} - 2yy'_{S,d}}{z'_{S,d}} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Im letzten Schritt haben wir die Phasenvariation einer Kugelwelle mit Ursprung im Punkt $(x'_{S,d}, y'_{S,d}, z'_{S,d})$ angesetzt. Da die Gleichung für alle (x, y) gelten muß, ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{1}{z'_{S,d}} = \frac{1}{z'_R} - \frac{m}{z_R} + \frac{m}{z_S}, \quad (7.32)$$

$$\frac{x'_{S,d}}{z'_{S,d}} = \frac{x'_R}{z'_R} - \frac{mx_R}{z_R} + \frac{mx_S}{z_S}, \quad (7.33)$$

$$\frac{y'_{S,d}}{z'_{S,d}} = \frac{y'_R}{z'_R} - \frac{my_R}{z_R} + \frac{my_S}{z_S}. \quad (7.34)$$

Dies sind die holographischen Abbildungsgleichungen in erster Näherung für das direkte Bild.

Für das konjugierte Bild folgt entsprechend

$$\frac{1}{z'_{S,k}} = \frac{1}{z'_R} + \frac{m}{z_R} - \frac{m}{z_S}, \quad (7.35)$$

$$\frac{x'_{S,k}}{z'_{S,k}} = \frac{x'_R}{z'_R} + \frac{mx_R}{z_R} - \frac{mx_S}{z_S}, \quad (7.36)$$

$$\frac{y'_{S,k}}{z'_{S,k}} = \frac{y'_R}{z'_R} + \frac{my_R}{z_R} - \frac{my_S}{z_S}. \quad (7.37)$$

Wie man sieht, geht der konjugierte Bildpunkt aus dem direkten Bildpunkt durch Vertauschen der Vorzeichen der letzten beiden Terme einer jeden Zeile hervor.

Wir wollen die Gleichungen für einige Spezialfälle diskutieren.

Benutzt man zur Rekonstruktion die gleiche Lichtwelle wie bei der Aufnahme, also $R' = R$ und $\lambda' = \lambda$ ($m = 1$), so erhält man für den direkten Bildpunkt

$$(x'_{S,d}, y'_{S,d}, z'_{S,d}) = (x_S, y_S, z_S), \quad (7.38)$$

d.h. das direkte Bild liegt direkt an der Stelle des ursprünglichen Objektes, wie es sein sollte.

Im Spezialfall einer ebenen Welle senkrecht zum Hologramm ergibt sich wegen $z_R, z'_R \rightarrow -\infty$ und $x_R/z_R, y_R/z_R, x'_R/z'_R, y'_R/z'_R = 0$

$$(x'_{S,d}, y'_{S,d}, z'_{S,d}) = (x_S, y_S, \frac{1}{m}z_S) = (x_S, y_S, \frac{\lambda}{\lambda'}z_S). \quad (7.39)$$

Dieser Fall entspricht der Beleuchtung der Hologrammplatte mit einer ebenen Referenzwelle senkrecht zur Hologrammplatte, aber mit einer

anderen Wellenlänge. Das Objekt wird also gemäß (9) parallel der z-Achse verschoben und gestreckt oder gestaucht, je nach dem Verhältnis der Wellenlängen λ'/λ . Die Querabmessungen bleiben erhalten!

Das direkte Bild ist bei einer Rekonstruktion mit gleicher Wellenlänge genau dann verzerrungsfrei, wenn man mit der Aufnahmegeometrie rekonstruiert. Benutzt man die gleiche Aufnahmegeometrie, so führt eine andere Wellenlänge stets zu Verzerrungen. Die Verzerrungen können durch eine Maßnahme umgangen werden, die allerdings gewöhnlich nicht durchführbar ist: Alle Abmessungen einschließlich der Hologrammgröße sind mit m zu multiplizieren. Eine Änderung der Hologrammgröße ist allerdings in den obigen Abbildungsgleichungen nicht vorgesehen.

Die Aberrationen haben wir nicht weiter besprochen. Sie sind wichtig, wenn man die Güte des Bildpunktes beurteilen will, d.h. wie verschmiert ein Punkt abgebildet wird. Wie man sich vorstellen kann, erfordert dies einigen Aufwand, der im gegebenen Fall am besten numerisch bewältigt wird. Mit diesem Problem wird man bei der holographischen Aufnahme kleiner Teilchen konfrontiert. Man stellt dabei fest, daß die Auflösung sehr schnell sinkt, wenn das Hologramm mit einer anderen als der Aufnahmewellenlänge beleuchtet wird. Die kleinen Teilchen lassen sich dann in ihrem ursprünglichen Durchmesser nicht mehr zuverlässig bestimmen.

7.3 Holographische Aufbauten

Da wegen der Kleinheit der Lichtwellenlänge die Interferenzerscheinungen gegenüber Verschiebungen sehr empfindlich sind, stellt eine holographische Versuchsanordnung hohe Ansprüche an die mechanische Stabilität, insbesondere, wenn Belichtungszeiten im Minutenbereich erforderlich werden. Keine besonderen Vorkehrungen sind dagegen erforderlich, wenn mit sehr kurzen, kohärenten Lichtpulsen gearbeitet wird, wie sie heute relativ leicht mit gütegeschalteten Lasern herstellbar sind.

7.3.1 Sichtlinienhologramme

Die einfachste Art der Hologrammerzeugung besteht darin, einen aufgeweiteten Laserstrahl durch das (hinreichend durchsichtige) Objekt hindurch auf die Hologrammplatte fallen zu lassen (Abb. 7.11).

Diese Art der Aufzeichnung wird in der Partikelmeßtechnik zur Untersuchung von Sprays aller Art, von Blasenverteilungen in Flüssigkeiten (Kavitation, Teilchenspuren in Blaskammern), sowie in der Meteorologie (Regentropfen) und Meeresbiologie (Plankton) eingesetzt. Sie stellt die geringsten Anforderungen an die Kohärenz des verwendeten Lichtes und wurde bereits von *Dennis Gabor* [7.1] verwendet. Die Referenzwelle wird

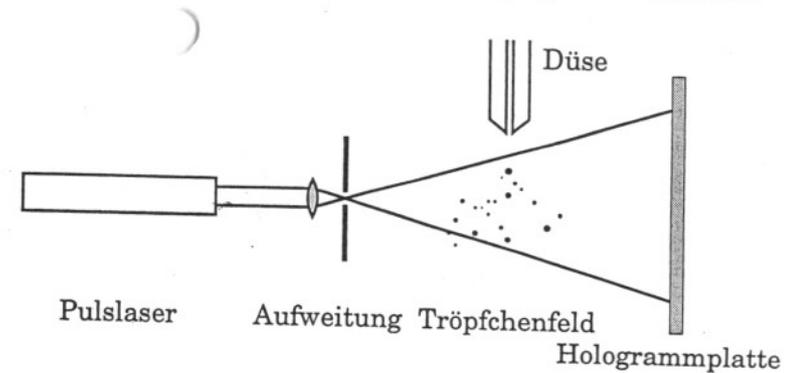


Abb. 7.11. Anfertigung eines Sichtlinienhologramms von einem Tröpfchenfeld.

dabei von dem ungestört durch das Partikelfeld hindurchgehenden Licht gebildet, die Signalwelle von dem an den Partikeln gestreuten Licht.

7.3.2 Auflichthologramme

Ein typischer Aufbau zur Aufnahme von sogenannten Auflichthologrammen ist in Abb. 7.12 dargestellt. Als Laserlichtquelle dient ein He-Ne Laser. Der Lichtstrahl wird mit Hilfe eines Strahlteilers aufgeteilt, um einen Teilstrahl für die Objektbeleuchtung (Objektwelle) und eine Referenzwelle zu erhalten. Beide Strahlen müssen aufgeweitet werden, um eine größere Fläche auszuleuchten. Dies geschieht mit Hilfe von Mikro-

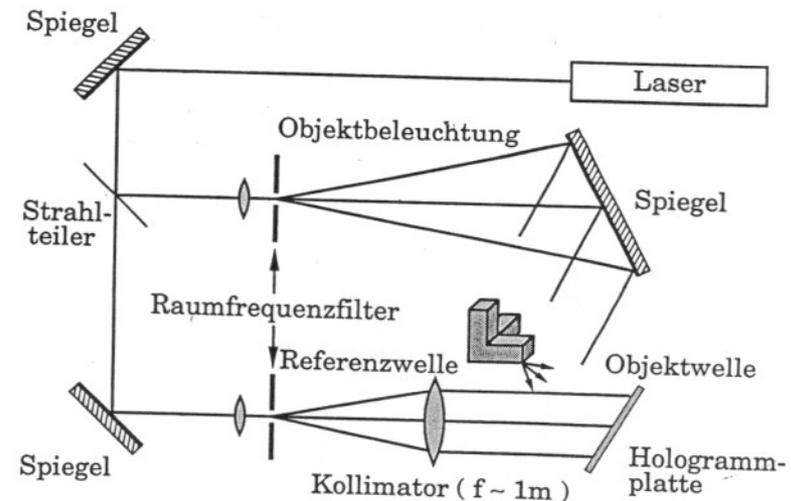


Abb. 7.12. Aufbau zur Aufnahme eines Auflichthologramms.

skopobjektiven, in deren Brennpunkt eine Lochblende steht (Raumfrequenzfilter). Die Lochblende hat die Aufgabe, einen sauberen, interferenzfreien Lichtstrahl zu erzeugen. Die Wirkungsweise wird später im Kapitel Fourieroptik genauer besprochen. Mit der Objektwelle wird über einen Spiegel, der groß sein sollte, eine Szene beleuchtet. Streulicht von den Objekten der Szene gelangt auf die Hologrammplatte und interferiert dort mit der Referenzwelle. Das Interferenzmuster wird aufgezeichnet und liefert das Hologramm. Beim Aufbau des Experiments ist, wie bei allen holographischen Aufbauten mit separat geführtem Referenzstrahl, dafür Sorge zu tragen, daß die Wege von Referenz- und Beleuchtungswelle vom Strahlteiler bis zur Hologrammplatte möglichst gleich lang sind. Der Weglängenabgleich ist wegen der üblicherweise begrenzten Kohärenzlänge auch von Laserlicht (vgl. Abschnitt 4.3) erforderlich, um ein kontrastreiches Interferenzmuster auf der Hologrammplatte zu erhalten. Beleuchten des Hologramms mit der Referenzwelle als Rekonstruktionswelle liefert ein dreidimensionales Bild der Objekte. Dazu entfernt man den Strahlteiler oder blockiert den Lichtweg zur Objektbeleuchtung. Abb. 7.13 zeigt verschiedene Ansichten eines rekonstruierten Bildes, die die Dreidimensionalität belegen. Den richtigen Eindruck kann aber nur ein Blick durch das Hologramm selbst vermitteln.

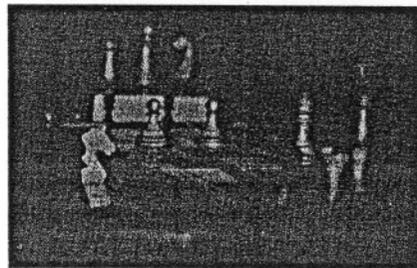
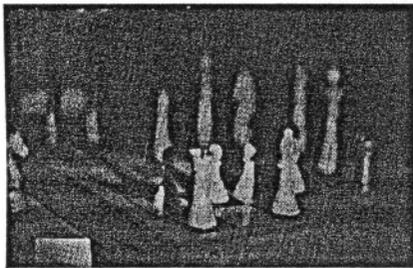


Abb. 7.13. Verschiedene Ansichten eines rekonstruierten Bildes. Das linke Bild zeigt eine photographische Aufnahme mit großer Blende und Scharfstellung auf den Vordergrund. Das rechte Bild wurde mit kleiner Blende und daher großer Schärfentiefe aufgenommen. Die Scharfstellung erfolgte hier auf die Bildmitte. Man beachte die deutlich in Erscheinung tretenden Speckels.

7.3.3 Durchlichthologramme

Durchsichtige Objekte werden im Durchlicht mit separatem Referenzstrahl aufgenommen. Abbildung 7.14 zeigt einen Aufbau zur Aufnahme von Durchlichthologrammen in einem Experiment zur Untersuchung des sogenannten laserinduzierten Durchschlags in Wasser. Dieser Versuch

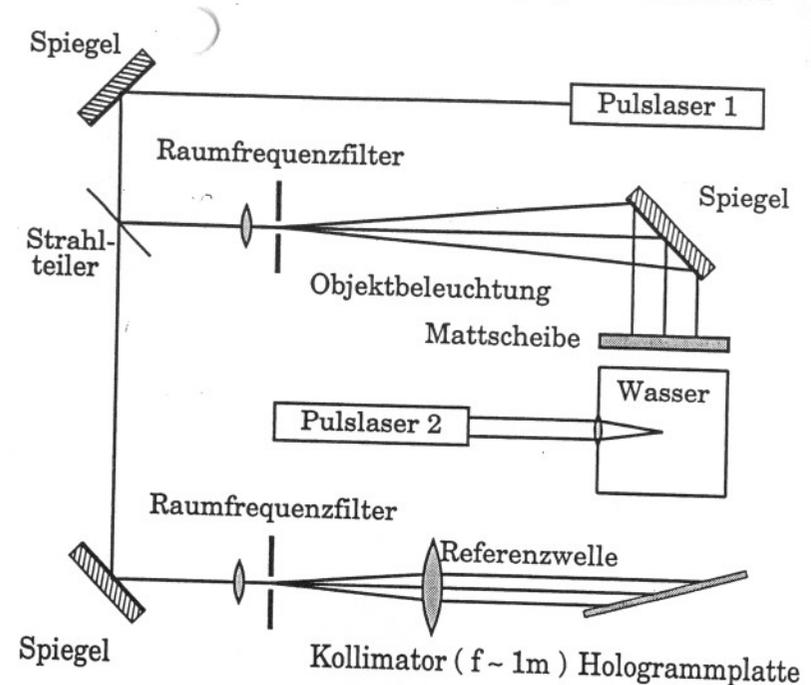


Abb. 7.14. Aufbau für Hologramme im Durchlicht.

stellt eine interessante Anwendung der Durchlichtholographie dar, bei der das unterschiedliche Verhalten von kohärentem und inkohärentem Licht ausgenutzt wird. Fokussiert man intensives Laserlicht in Luft oder Wasser, so erhält man einen Durchschlag. Er ist sehr ähnlich einem Funddurchschlag zwischen zwei Elektroden bei hoher Spannung zwischen den Elektroden. Bei einem solchen Durchschlag wird intensives weißes Licht und eine Stoßwelle abgestrahlt. In Wasser bildet sich nach dem Durchschlag zusätzlich eine Blase, die zunächst expandiert. Will man das physikalische Phänomen des Durchschlags mit Blasenbildung und Stoßwellenabstrahlung untersuchen, so stört das intensive weiße Licht, da es photographische und interferometrische Aufnahmen überstrahlt. Fertigt man aber ein Hologramm mit sehr kurzer Belichtungszeit im Bereich einiger Nanosekunden an, so wird erstens die schnelle Dynamik im Aufzeichnungsprozeß als dreidimensionale Momentaufnahme festgehalten und zweitens das beim Durchschlag ausgesandte weiße Licht ausgeblendet. Da es inkohärent ist, belichtet es die Hologrammplatte nur gleichmäßig und wird bei der Rekonstruktion des Bildes nicht mitrekonstruiert. Dadurch können die entstehende Blase und die abgestrahlte Stoßwelle ungestört aufgenommen werden (Abb. 7.15).

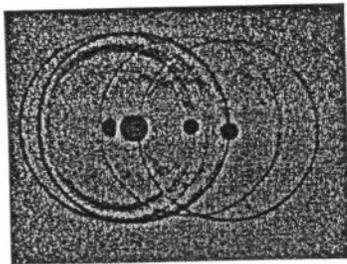


Abb. 7.15. Beispiel für einen lichtinduzierten Durchschlag durch Fokussierung eines Riesenimpulses in Wasser. Sichtbar sind die entstandenen Blasen und die zugehörigen Stoßwellen.

7.3.4 Weißlichthologramme

Da die Holographie wesentlich von der Kohärenz des verwendeten Lichtes Gebrauch macht, haben wir bisher die nötige Kohärenz vorausgesetzt. Da Laser auch heute noch nicht überall verfügbare Lichtquellen sind, kann man sich fragen, welche Kohärenzeigenschaften man bei gegebenem Aufbau unbedingt benötigt bzw. ob es Anordnungen gibt, die mit eingeschränkter Kohärenz auskommen. Dabei hat man gefunden, daß man in der Tat bei entsprechender Herstellung eines Hologramms gute Bildrekonstruktionen selbst mit weißem Licht erhält, allerdings mit eingeschränkter Bildtiefe.

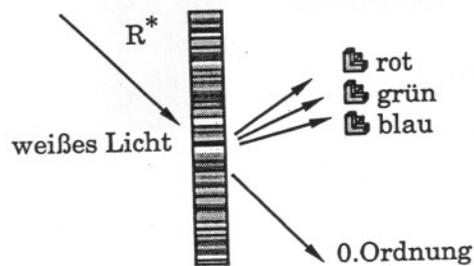


Abb. 7.16. Überlagerung der Bilder bei der Rekonstruktion mit weißem Licht statt der konjugierten Referenzwelle.

Zunächst fragen wir, was sich ergibt, wenn man ein übliches Hologramm mit weißem Licht beleuchtet und damit das gespeicherte Bild zu rekonstruieren versucht (Abb. 7.16). Infolge der unterschiedlichen Beugung der Wellen verschiedener Frequenzen, die im weißen Licht vorhanden sind, kommt es zur räumlichen Überlagerung der einzelnen Bilder. Jeder einzelne Bildpunkt wird zu einem kleinen Weißlichtspektrum ausgedehnt. Das ursprüngliche Bild wird dadurch in den meisten Fällen

unkenntlich. Mit Hilfe von Farbfiltern kann man die Bildqualität verbessern, das Bild wird dann aber sehr dunkel.

Es gibt einen anderen Weg, Hologramme herzustellen, die mit weißem Licht betrachtet werden können, sogenannte Weißlichthologramme. Man erhält sie, indem man bei der Aufnahme die kohärente Referenz- und die Objektwelle von zwei verschiedenen Seiten auf die Fotoplatte einfallen läßt (Abb. 7.17). Man erhält dann im Fotomaterial Interferenzschichten,

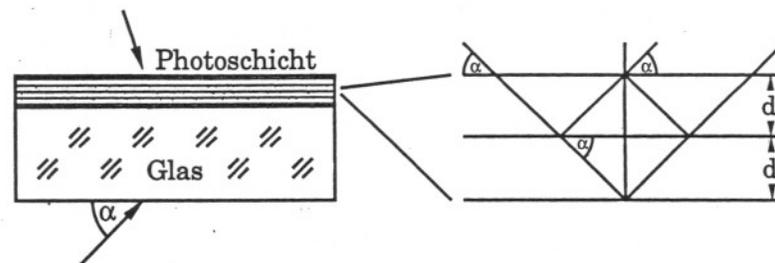


Abb. 7.17. Aufnahmegeometrie beim Weißlichthologramm und Bragg-Reflexion.

die im wesentlichen parallel zur Plattenoberfläche verlaufen. In einer ca. $7\mu\text{m}$ dicken Fotoschicht befinden sich dann ungefähr 15 parallele Interferenzschichten. Beleuchtet man das so aufgezeichnete Hologramm mit weißem Licht aus der Richtung R^* , so treten an den Schichten jeweils Reflexionen auf, die je nach Wellenlänge in gewissen Richtungen konstruktiv interferieren (Bragg-Reflexion). Bezeichnet man mit d den Abstand der Interferenzschichten, mit α den Beobachtungswinkel, so ergibt sich gemäß der Bragg-Bedingung

$$2d \sin \alpha = n\lambda, \quad n = 1, 2 \dots \quad (7.40)$$

eine konstruktive Interferenz der reflektierten Teilwellen für $n = 1$ nur bei einer Wellenlänge λ_α entsprechend dem Winkel α (Abb. 7.17). Blickt man also unter dem Winkel α auf das Hologramm, so sieht man das Bild nur bei der Wellenlänge λ_α , ohne die störende Überlagerung der anderen Wellenlängen. Die parallel angeordneten, mit der Bildinformation modulierten Schichten wirken wie ein Interferenzfilter für die Beobachtungswellenlänge.

Ein einfacher Aufbau zur Herstellung eines Weißlichthologramms ist in Abb. 7.18 gezeigt. Bei der Aufnahme wird wie bisher ein Laser (z.B. He-Ne Laser) benötigt. Der Laserstrahl wird aufgeweitet, kollimiert und über einen großflächigen Spiegel durch die Fotoplatte hindurch auf das Objekt gelenkt. Die Referenzwelle entspricht dem direkt vom Laser kommenden Licht, die Signalwelle dem vom Objekt reflektierten Licht. Um genügend Licht durch Rückstreuung vom Objekt zu erhalten, sind stark reflektierende Objekte zu benutzen.

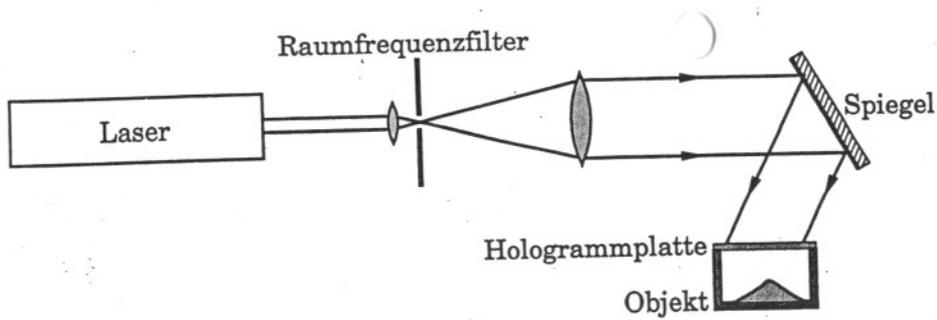


Abb. 7.18. Aufbau zur Aufnahme eines Weißlichthologramms.

Der Abstand Objekt – Hologrammplatte ist gering zu halten, damit später bei der Rekonstruktion mit weißem Licht die räumliche Kohärenzbedingung hinreichend gut eingehalten wird. Wenn man keine besonderen Vorkehrungen bei der Entwicklung der Fotoplatten trifft, schrumpft die Schicht durch den Entwicklungsprozeß. Dies hat zur Folge, daß ein mit rotem Licht aufgenommenes Hologramm bei Betrachtung im weißen Licht die besten Bilder im Grünen liefert. Abbildung 7.19 zeigt das Photo eines Reiters, das mit weißem Licht in Reflexion von einem Weißlichthologramm aufgenommen wurde.

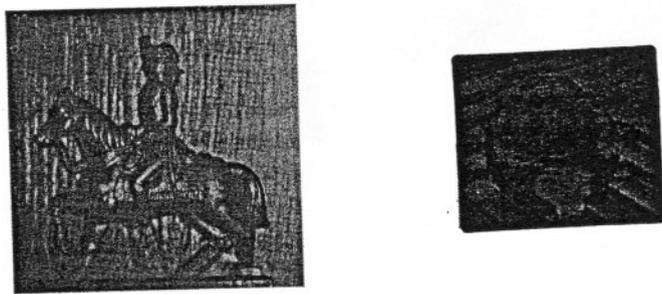


Abb. 7.19. Beispiel eines Photos eines mit weißem Licht rekonstruierten Weißlichthologramms. Rechts ein echtes Weißlichthologramm.

7.3.5 Regenbogenhologramme

Eine andere Methode, die Überlagerung der verschiedenfarbigen Bilder bei der Rekonstruktion mit weißem Licht zu verhindern, besteht darin, den Freiheitsgrad der vertikalen Parallaxe gegen den Freiheitsgrad Wellenlänge auszutauschen. Das gelingt mit Hilfe phasenkonjugierter Wellen, die mit Hologrammen leicht realisierbar sind. Kurz gesagt, besteht die

Methode darin, ein konjugiertes Bild eines spaltbreit beleuchteten Mutterhologramms holographisch in normaler oder Weißlichtgeometrie aufzunehmen. Wie die Farbtrennung bei der Betrachtung zustandekommt, wird in Abb. 7.20 erläutert. Die wiederum konjugiert rekonstruierten Bil-

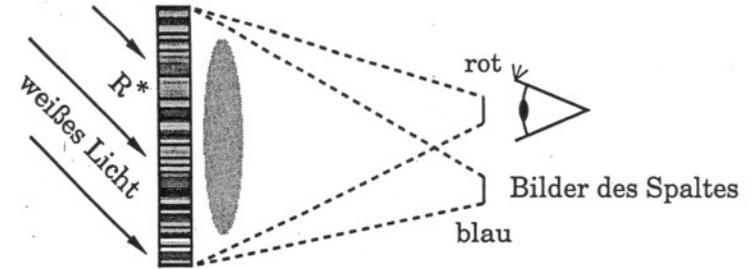


Abb. 7.20. Rekonstruierte Bilder bei einem Regenbogenhologramm.

der überlagern sich zwar nach wie vor im Raum. Bei der weiteren Ausbreitung konvergieren aber die verschiedenen Farben zu verschiedenen Spalten, da das Objektbild nur von einem schmalen Spalt aus in den Raum projiziert worden war. Diese Spalte überlagern sich zwar auch für benachbarte Wellenlängen, doch kann die Verschiebung von blau nach rot hinreichend groß gemacht werden, so daß sich scharfe Bilder in dem Auge sehr rein erscheinenden Spektralfarben ergeben.

Ein Aufbau zur Aufnahme von Regenbogenhologrammen ist in Abb. 7.21 gezeigt. Das Mutterhologramm wird nur einen Spalt breit horizontal beleuchtet, und zwar mit der konjugierten Referenzwelle. Da bei der Rekonstruktion das Weißlicht schräg von oben einfallen soll, wurden das Mutterhologramm und die Fotoplatte für das Regenbogenhologramm um 90° gedreht. Der Aufbau wird dann einfacher, da seitlich schräger Einfall leichter zu realisieren ist. Der Spalt muß dann vertikal verlaufen. Das konjugierte Bild des Mutterhologramms sollte einen Abstand von etwa 30–50 cm vom Hologramm haben. Da nämlich später das Auge an den Ort des rekonstruierten Spaltstreifens auf dem Mutterhologramm gebracht wird, sollte das Auge gut auf den Gegenstand fokussiert werden können. Die Fotoplatte für das Regenbogenhologramm wird in die Nähe des rekonstruierten, konjugierten Objektes gestellt, um die Gesamtansicht voll auszunutzen.

Die entwickelte Fotoplatte, das Regenbogenhologramm, kann dann, wie in Abb. 7.20 gezeigt, in weißem Licht (Projektor, Sonnenlicht) betrachtet werden, das wiederum aus der Richtung der konjugierten Referenzwelle einfallen muß. Das Objekt ist in klaren Spektralfarben mit horizontaler Parallaxe zu sehen. Bewegt man das Auge aber vertikal auf und ab, so wechselt die Farbe von leuchtend blau zu leuchtend rot, d.h. es ist keine vertikale Parallaxe vorhanden, statt dessen wird eine andere Wellenlänge aus dem Weißlicht zur Rekonstruktion des Bildes ausgewählt. Bringt man

das Auge nicht genau in die Spaltebene, sondern davor oder dahinter, so beginnen die Farben sich zu überlagern, und zwar derart, daß ein Teil des Bildes anders gefärbt, aber zunächst noch scharf, erscheint. Man kann es erreichen, daß das Objekt alle Farben von blau bis rot enthält, und zwar vertikal das Spektrum durchlaufend. In allen Fällen kann man trotz vertikaler Änderung der Blickrichtung nicht auf oder unter das Objekt sehen, wohl aber immer links oder rechts an einem Objekt vorbei.

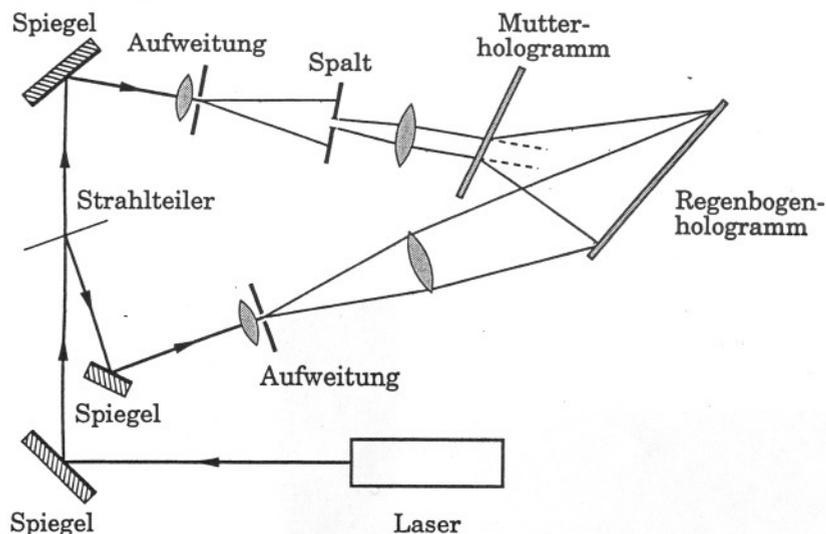


Abb. 7.21. Aufbau zur Aufnahme eines Regenbogenhologramms.

7.3.6 Holographische Kinematographie

Um Bewegungen darzustellen reichen Einzelbilder nicht aus. Das Problem der Bewegungsdarstellung ist durch die Film- und Fernsehtechnik gelöst, allerdings nur für zweidimensionale Bilder. Es stellt sich die Frage, ob mit Hilfe der Holographie auch dreidimensionales Filmen möglich ist. Das ist in der Tat der Fall. Allerdings ist das Verfahren sehr aufwendig und enthält viele Einschränkungen. Ein holographischer Film ist nur für wenige Betrachter gleichzeitig projizierbar und einfarbig. Der holographische Film hat sich daher nicht durchgesetzt. Im wissenschaftlichen Bereich gibt es aber einige Anwendungsbereiche, z.B. zur dreidimensionalen Bewegungsanalyse von Partikelfeldern (Tröpfchen in Luft, Blasen in Wasser) und zur Sichtbarmachung dreidimensionaler Strömungen durch Verfolgen von Streuteilchen in Flüssigkeiten. Das eröffnet völlig neue Möglichkeiten für die experimentelle Hydrodynamik zur Untersuchung der Turbulenz und kohärenter Strömungsstrukturen [7.2].

7.4 Digitale Holographie

Nichts spricht dagegen, daß der holographische Aufnahmevorgang mit Hilfe eines Digitalrechners simuliert werden kann. Der Computer berechnet bei dieser digitalen oder synthetischen Holographie die Transmissionsverteilung auf der Hologrammplatte. Diese wird durch ein geeignetes Ausgabeverfahren auf eine Photoplatte gebracht. Die Beleuchtung des digitalen Hologramms mit kohärentem Licht gemäß der simulierten Aufnahmegeometrie rekonstruiert dann das Bild des Objekts, das real nicht existiert hat. Dieses Verfahren hat den offensichtlichen Vorteil, daß Hologramme von Objekten berechnet werden können, die nur in einer mathematischen Beschreibung vorliegen, wie z.B. mehrfach fokussierende oder asphärische Linsen.

Die Erstellung eines digitalen Hologramms erfordert

- ein möglichst einfaches und rechenzeitparendes mathematisches Modell (Algorithmus) zur Berechnung digitaler Hologramme,
- einen leistungsfähigen Digitalrechner und
- einen hochauflösenden und schnellen Plotter zur graphischen Ausgabe des errechneten Beugungsmusters.

Wir wollen hier nur die direkte digitale Simulation des bisher betrachteten analogen holographischen Aufzeichnungsvorgangs und eine digital mögliche Erweiterung betrachten. Es gibt eine Vielzahl anderer Verfahren, die z.B. in [7.3] beschrieben werden.

7.4.1 Direkte Simulation

Für die numerische Rechnung wird das Objekt in L leuchtende Punkte P_l , $l = 1, \dots, L$ mit den Koordinaten (x_l, y_l, z_l) diskretisiert, und die Hologrammebene ($z=0$) durch ein Punktgitter $\{(x_m, y_n, 0), m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N\}$ approximiert (siehe Abb. 7.22).

Von jedem Punkt P_l sollen Kugelwellen ausgehen, für deren komplexe Amplitude an der Stelle (x_m, y_n) des Hologramms gilt (die z -Koordinate wird wegen $z = 0$ im folgenden weggelassen):

$$E_{lmn} = A_l e^{i\varphi_l} \frac{e^{ikr_{lmn}}}{r_{lmn}} \quad (7.41)$$

Dabei sind

$$r_{lmn} = \sqrt{(x_l - x_m)^2 + (y_l - y_n)^2 + z_l^2} \quad (7.42)$$

der Abstand des Punktes P_l vom Hologrammgitterpunkt (x_m, y_n) , A_l die Amplitude und φ_l die Phase der vom Punkt P_l ausgehenden Welle. Um die