

ANLAGE I FEHLERRECHNUNG

GPI

Reale Größen- oder Wertausprägungen tragen aufgrund der Natur der Dinge einen zufälligen Charakter mit einem Streuverhalten, und die Erfassung (Messung) solcher Werte ist durch dies Verhalten selbst und durch zusätzliche, unvermeidbare Mängel jedes Messverfahrens nur näherungsweise möglich. Auch wenn Messwerte durch Zahlen dargestellt werden, so haben diese Maßzahlen nicht die Eigenschaft exakter Werte im mathematischen Sinn, sondern sie stellen lediglich zufällige Einzelwerte verteilter Größen dar.

In allen experimentellen Arbeitsgebieten führt dies zur Anwendung von Statistik bei quantitativen Untersuchungen, wobei die statistischen Methoden der Messtechnik und Physik als Fehlerrechnung bezeichnet werden. Im Rahmen des Physikalischen Grundpraktikums werden einführend sehr einfache Methoden der Fehlerrechnung betrachtet und vermittelt, die an ein grundsätzliches Verständnis der Fehlerrechnung und eine kritische, statistische Betrachtung von Messergebnissen heranführen sollen.

Die Fehlerrechnung gehört zu den elementaren Methoden des Physikers, und Diskussionen der Fehler und Voruntersuchungen zur erzielbaren Genauigkeit stehen stets am Anfang der Konzeption eines Experiments, da dessen Durchführung nur dann sinnvoll wird, wenn die Fehler genügend klein bleiben, um auf die gestellte Frage eine signifikante Antwort geben zu können.

Statistische Situation und Grundlagen

Statistische Grundsätze

Statische Betrachtungen und Methoden unterliegen zwei elementaren Grundsätzen:

- (1) Statistische Aussagen kennzeichnen Ensembleeigenschaften, wobei kein Schluss von einem Einzelfall auf die Gesamtheit möglich ist.
- (2) Statistische Aussagen sind Wahrscheinlichkeitsaussagen mit endlicher Genauigkeit und (damit korrelierter) endlicher Sicherheit.

Empirische Situation

Die Unschärfe physikalischer Größen selbst und zusätzliche unvermeidbare zufällige und systematische Abweichungen durch die Messmethode führen dazu, dass Messwerte verteilt sind, wobei der Schwerpunkt der Messwerteverteilung nicht mit dem Schwerpunkt der Größenverteilung zusammenfallen muss. Messergebnisse können daher nur näherungsweise ermittelt werden, und die Bestimmung exakter Werte bleibt ausgeschlossen. Aus dieser Sicht werden die aus praktischen Daten nach Methoden der mathematischen Statistik gewonnenen Ergebnisse als Schätzungen bezeichnet, wobei vollständige Schätzungen durch Intervalle erfolgen (Intervallschätzungen), die sowohl die Lage (Wert) als auch die Streuung der verteilten Größe (Fehler) repräsentieren, und die darüber hinaus schließende Vergleiche ermöglichen (s.u.).

Zufällige Fehler: Fehlerverteilung und Fehlerintervall

Messwerte sind durch die zufälligen Einflüsse normalverteilt; dies ist eine empirisch beobachtete Tatsache. Normalverteilungen sind durch zwei Parameter gekennzeichnet; der Erwartungswert μ beschreibt die Lage und die Standardabweichung σ die Streuung der Verteilung, wobei in einem Intervall ($\mu \pm \sigma$) um den Erwartungswert (zentrales Schwankungsintervall) 68 % aller Werte der Verteilung zu finden sind. Für einen beliebigen Wert der Verteilung, z.B. ein Messergebnis x_i , beträgt dann umgekehrt für ein gleich großes Intervall ($x_i \pm \sigma$) die statistische Wahrscheinlichkeit ebenfalls 68 %, dass der Erwartungswert von diesem Intervall erfasst wird. Intervalle dieser Art werden als statistische Intervallschätzung für die Größe X bezeichnet und heißen Vertrauens- oder Fehlerintervalle.

Das Intervall ($x_i \pm \sigma$) ist das vollständige Ergebnis einer Messung; der Intervallradius selbst heißt Fehler Δx . Er ist ein Maß für die zu erwartende Abweichung und repräsentiert damit eine Genauigkeit im Rahmen einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, der statistischen Sicherheit. Dabei besteht eine Art "Unschärferelation" zwischen der Genauigkeit und der Sicherheit: Je genauer eine Aussage getroffen, d.h. je kleiner das Fehlerintervall angesetzt wird, um so geringer wird die Sicherheit der Aussage, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das angegebene Intervall den Erwartungswert erfasst.

Zur Verdeutlichung sei wiederholt: in der Physik und Messtechnik wird die einfache Standardabweichung als Fehlermaß zugrunde gelegt, bei der die statistische Sicherheit 68 % ($\approx 2/3$) beträgt, und bei der damit andererseits eine Irrtumswahrscheinlichkeit von immerhin 32 % ($\approx 1/3$) verbleibt. (In anderen Fachgebieten ist dies aus besonderen Gründen nicht tragbar, und es werden höhere Sicherheiten zugrunde gelegt; wie in den Biowissenschaften und der Medizin, wo typischerweise die dreifache Standardabweichung herangezogen wird, die eine statistische Sicherheit von 99,7 % umfasst).

Die Fehlerintervalle als Ergebnisse von Messungen sind grundsätzlich als homogen zu betrachten, d.h. der Ergebniswert als Intervallmitte ist nicht wahrscheinlicher (und damit nicht besser) als irgendein anderer Wert des Intervalls.

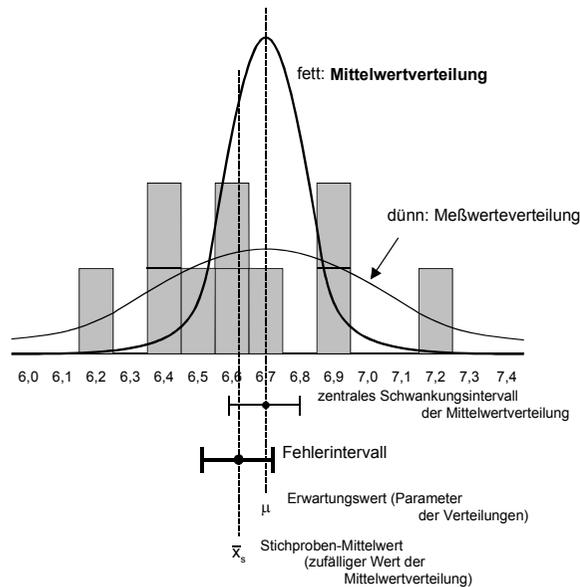
Systematische Fehler

Neben zufälligen Fehlern treten systematische Einflüsse auf, die zu bestimmten, einseitigen Abweichungen von den tatsächlichen Werten führen, wie z.B. verbogene Zeiger, schiefstehende Waagen oder Kalibrierfehler. Systematische Fehler sind grundsätzlich vermeidbar, aber schwer erkennbar (die zufälligen Fehler offenbaren sich durch die Streuung). Im Rahmen des Grundpraktikums sollen zufällige und systematische Fehler nicht weiter unterschieden und gleich behandelt werden.

Beispiel einer Messwertverteilungen

Grafische Darstellung des Histogramms (Rechteckflächen) einer Messreihe (Stichprobe) und der zugehörigen (hypothetischen) Verteilungsfunktionen.

Die dargestellten Verhältnisse zeigen ein Beispiel mit einem geringen Auflösungsvermögen im Vergleich zur Standardabweichung der Verteilungsfunktion, wie dies vielfach bei Messproblemen angetroffen wird, und einem sehr kleinen Stichprobenumfang (10 Messwerte). Dabei ist deutlich zu erkennen, dass eine derartig geringe Datenmenge kaum als Stichprobe im statistischen Sinn zu betrachten ist und nur eine sehr grobe Näherung der Verteilungsfunktion darstellt.



Schließender Vergleich

Jede Schlussfolgerung aus Ergebnissen folgt durch quantitativen Vergleich: auf Abhängigkeiten bei Variation eines Parameters, zwischen Theorie und Experiment, durch Vergleich mit vorhandenen Daten (Literaturwerten). Im Sinne eines *statistischen Tests* sind drei Vergleichsergebnisse konventionell festgelegt:

Ergebnisse werden als (uneingeschränkt) gleich bewertet, wenn sich ihre (*einfachen*) *Fehlerintervalle* gegenseitig erfassen.

Ergebnisse werden als verträglich bewertet, wenn sie sich noch im Rahmen der *dreifachen Fehlerintervalle* erfassen.

Ergebnisse werden erst dann als signifikant unterschiedlich betrachtet, wenn die Abweichung über die dreifachen Fehlergrenzen hinausgeht.

Auflösungsvermögen

Viele Messverfahren zeigen keine Streuung und liefern *stabile* Messwerte. Dies liegt daran, dass jedes Messverfahren und jede Zahlenrealisation (Skala, Anzeige) ein begrenztes *Auflösungsvermögen* besitzt, unterhalb

der Werte nicht mehr getrennt wahrnehmbar sind oder dargestellt werden. Alle realen Werte haben *diskreten* Charakter und zeigen sich stabil, wenn die Streuung unterhalb der dadurch gegebenen Auflösungsgrenze liegt.

Die Fehlerabschätzung muss hier die Skalenauflösung (Ablesemöglichkeiten) oder Zahlendarstellung (Digitalanzeigen) und gegebenenfalls zusätzliche Umstände der Messung berücksichtigen, und man spricht von einem *praktischen Schätzfehler*.

Bei *Analoganzeigen* (Skala/Zeiger) kann innerhalb der Skalenteile (Skalenteile) meist eine weitere *Schätzstelle* abgelesen werden, und der Fehler hängt von der Skalenausführung und den Parallaxeeinflüssen ab und muss subjektiv geschätzt werden:

Analoganzeige : $\Delta_{\text{Schätz}} = 0,1 - 0,5 \text{ Skt}$ (Skalenteile)

Dabei stellen 0,5 Skalenteile eine Obergrenze dar, wenn das Schätzen eines Zwischenwerts nicht möglich ist, und ein ganzes Anzeigintervall als Fehlerintervall herangezogen werden muss.

Bei Digitalanzeigen ist der Schätzfehler wegen der Unkenntnis des Rundungsmechanismus mit $(\pm) 1$ in der letzten Stelle der Anzeige anzunehmen:

Digitalanzeige : $\Delta_{\text{Schätz}} = 1 d$ (Digit)

Gerätevoraussetzungen: Nennfehler

Jedes Messgerät ist bauartbedingt mit Fehlern verbunden, die vom Hersteller untersucht und mit den Gerätedaten angegeben und vom Benutzer berücksichtigt werden müssen; sie werden hier als *Nennfehler* bezeichnet.

Typisch für Geräte mit beitragenden Nennfehlern im Praktikum sind elektrische Multimeter (*U/I/R/C/L*). Analogmultimeter werden durch ihre *Güteklasse* charakterisiert, die den absoluten Fehler als Prozentwert vom Messbereich angibt:

Güteklasse k : $\Delta x = \frac{k}{100} \cdot \text{Meßbereich}$

Die Güteklasse ist (neben anderen Kennzeichen) als kleine Zahl (im Wertebereich von etwa 0,5 bis 3) zusammen mit der Stromart (= oder ähnlich für Gleich-

strom; \approx für Wechselstrom) mit auf der Skala der Geräte angegeben.

Bei Digitalmultimetern setzt sich der Fehler aus einem relativen Anteil in % vom Messwert (% v. M.) und einem absoluten Anteil in *Digits* (d ; Einheit der letzten Stelle) zusammen:

p % v.M. + $n d$:

$$\Delta x = \frac{p}{100} \cdot \text{Meßwert} + n \text{ Einheiten in der letzten Stelle}$$

Im Praktikum sind die Nennfehler in den jeweiligen Platzskripten angegeben, sofern sie einen dominanten Beitrag darstellen, und müssen dann zu den Messergebnissen berücksichtigt werden.

Fehlerbegriffe

Die anzunehmenden Abweichungen selbst werden genauer als *absolute Fehler* bezeichnet und allgemein mit einem großen griechischen Delta geschrieben; der absolute Fehler wird für den *Vergleich* von Größen herangezogen:

$\Delta x = \text{absoluter Fehler} (= \text{Vergleichsmaß})$

Bei der *Fehlerfortpflanzung* (s.u.) wird der absolute Fehler bei additiven Verknüpfungen benötigt (+/-).

Als *Genauigkeitsmaß* wird zusätzlich der *relative Fehler* herangezogen, der den Fehler auf die Messgröße selbst bezieht. Der relative Fehler wird mit einem kleinen griechischen Delta geschrieben:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \text{relativer Fehler} (= \text{Genauigkeitsmaß})$$

Der relative Fehler ist eine Verhältniszahl und dimensionslos. Im entsprechenden Wertebereich werden relative Fehler meist in % angegeben (1% = 0,01).

Bei kleinen Werten werden Zehnerpotenzen abgespalten ($\delta x = 3 \cdot 10^{-5}$ für $\delta x = 0,00003$).

Bei der *Fehlerfortpflanzung* (s.u.) wird der relative Fehler bei multiplikativer Verknüpfung benötigt (x/\pm).

Gliederung der Fehlerrechnung

Ein Experiment besteht im Allgemeinen aus den eigentlichen *Messungen* mit der Aufnahme der Messwerte und Bestimmung der Messergebnisse und der anschließenden *Auswertung* mit der arithmetischen Berechnung des Versuchsergebnisses oder der Auswertung funktionaler Zusammenhänge. Die zugehörige Fehlerrechnung gliedert sich dementsprechend in die Bestimmung der *Messfehler*, die Berechnung der Fehler bei arithmetischen Auswertungen, die als *Fehlerfortpflanzung* bezeichnet wird, und die *Fehlerbestimmung bei der Auswertung von Funktionen*.

Messfehler

Die Fehler der Messwerte (Messfehler) lassen sich grob drei Kategorien zuordnen, wobei in der Praxis meist einer der Beiträge dominiert und allein weiter betrachtet werden kann (siehe ergänzender Absatz zu *beitragenden* und *nichtbeitragenden Fehlern*).

Zu einer Messung gehört oft eine vorhergehende *Einstellung* (Anlegen eines Maßstabs, Auslösen einer Stoppuhr, Justierung oder Einstellung an einer optischen Apparatur, Einstellung eines zusätzlichen "Parameters", wie z.B. einer Temperatur), wobei im Folgenden nicht unterschieden werden soll, ob der Fehler des Messwert nur aus dem Messverfahren oder zusätzlich aus erforderlichen Einstellungen herrührt.

Kontrollmessung

Zum Erkennen des Streuverhaltens ist es grundsätzlich erforderlich, eine Messung zu wiederholen bzw. bei kontinuierlicher Messung einen Messwert über einige Zeit zu beobachten.

Zeigt die Messgröße eine (deutliche) Streuung, so muss aus statistischer Sicht eine *Stichprobe* erhoben, d.h. eine Messreihe aufgenommen und statistisch ausgewertet werden (siehe folgendes Kapitel).

Zeigt sich die Messgröße dagegen konstant, so wird die Streuung nicht aufgelöst, so muss aus dem Auflö-

sungsvermögen und aus den übrigen Messumständen ein Fehler abgeschätzt werden (siehe Kapitel *Auflösungsvermögen* oben).

Stichprobenschätzung (Messreihe und Streufehler)

Aus einem (Einzel-) Messwert einer schwankenden Größe kann grundsätzlich keine (statistische) Aussage gewonnen werden, insbesondere auch nicht die Standardabweichung der zugehörigen Messwertverteilung als Fehlermaß. Aus einer Stichprobe (Messreihe) als Näherungsform der Verteilung können aber nicht nur Näherungswerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der Verteilung selbst, sondern aufgrund innerer, statistischer Zusammenhänge auch die Standardabweichung der *Mittelwertverteilung* berechnet werden, so dass man als Ergebnis den (einzelnen) Mittelwert mit seinem Fehler angeben kann. Wenn x_s die Stichproben-Messwerte und n deren Anzahl sind, so ergibt sich als Ergebnis x der Mittelwert zu:

$$x = \bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum x_s$$

Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ der Mittelwertverteilung als Fehler hängt von der Streuung (Standardabweichung σ) der Messgröße selbst und dem Umfang n der Stichprobe ab:

$$\Delta x = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Die Standardabweichung σ einer Verteilung ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung σ^2 (*Varianz*), deren Konstruktion der des Mittelwerts (12) entspricht:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

Da die Messreihe als Stichprobe nur eine Näherung der Verteilung wiedergibt, kann auch die Standardabweichung nur näherungsweise berechnet werden. Die übliche Kennzeichnung für den Näherungswert ist dabei ein tiefgestellter Index $n-1$ an der Standardabweichung, da durch $n-1$ statt durch n dividiert wird (Zahl der "überschüssigen" Messungen):

$$\sigma^2 \approx \sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_s - \bar{x})^2$$

Als Fehler des Mittelwerts ergibt sich dann mit (13 und 15)

$$\Delta x \approx \sqrt{\frac{\sum (x_s - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Bei einfachen Standard-Messverfahren, wie sie im Grundpraktikum zur Anwendung kommen, werden Streuungen seltener beobachtet, und statistische Auswertungen nach (12) und (16) kommen nur vereinzelt vor.

Fehlerfortpflanzung

Linearkombination von Verteilungen

Die Fehlerverknüpfungen bauen auf die Verknüpfungsregeln von Verteilungen auf, wobei sich für die Streuung eine "kompensierende" Wirkung ergibt, wenn im Einzelfall positive und negative Abweichungen zusammen kommen und die Summenabweichung verringern. Im elementaren Fall einer Linearkombination zweier statistisch unabhängiger Verteilungen X_i und Y_i zur Summenverteilung $(aX + bY)_i$ addieren sich die Mittelwerte und Varianzen (mittlere quadratische Abweichungen) entsprechend ihrer linearen Konstruktion:

$$a x_i + b y_i = a \bar{x} + b \bar{y}$$

und

$$\sigma_{ax_i+by_i}^2 = a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2$$

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Eine Auswertbeziehung stellt den Ergebniswert z als Funktion der Messvariablen a, b, c, \dots dar:

$$z = f(a, b, c, \dots)$$

Zur Fehlerbetrachtung werden die Messfehler $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ als kleine Abweichungen von den Messergebnissen

a_0, b_0, c_0, \dots betrachtet, und die Auswertefunktion näherungsweise in eine lineare Taylorreihe entwickelt:

$$z \approx z_0 + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial f}{\partial c} \Delta c + \dots$$

Bei der Bildung der Standardabweichung nach (18) als Fehler Δz fällt z_0 als konstanter Anteil heraus, und man erhält das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c} \Delta c\right)^2 + \dots}$$

Dabei stellen die partiellen Ableitungen nach den Messvariablen *Gewichtsfaktoren* für die Beiträge der einzelnen Messgrößen dar, und die Addition der Quadrate mit anschließender Wurzel berücksichtigt den Verteilungscharakter mit der Wahrscheinlichkeit der Kompensation von Abweichungen [der Gesamtfehler nach (21) ist kleiner als die lineare Summe der Komponenten].

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz setzt als wichtige Einschränkung voraus, dass die Messvariablen *statistisch unabhängig* und *nicht korreliert* sind.

Elementarregeln

Die partiellen Ableitungen können die geschlossene Berechnung des Ergebnisfehlers nach (21) u.U. aufwendig machen, und bei arithmetischen Verknüpfungen kann es einfacher sein, die Fehlerfortpflanzung für die einzelnen Verknüpfungsschritte "von innen nach außen" paarweise abzarbeiten, entsprechend dem Vorgehen bei der arithmetischen Berechnung des Ergebnisses selbst. Dabei ergibt sich aus (21) für die Rechenoperationen:

$$\Delta(a \pm b) = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

d.h. bei Addition oder Subtraktion "addieren" sich (Fehlerquadrate und Wurzel) die absoluten Fehler. Für Multiplikation und Division folgt mit entsprechenden Umformungen:

$$\delta(a \times / \div b) = \sqrt{(\delta a)^2 + (\delta b)^2}$$

d.h., bei Multiplikation und Division "addieren" sich die relativen Fehler.

Bei Potenzen (Wurzeln) vervielfacht sich der relative Fehler um den Exponenten:

$$\delta(a^r) = r \delta a$$

Für Werte "höherer" Funktionen muss der Fehler nach (21) durch Ableitung berechnet werden. Voraussetzung auch für die Anwendung der Elementarregeln ist die statistische Unabhängigkeit der einzelnen Größen, so dass sie nur für Auswertebeziehungen geeignet sind, bei der jede Messgröße nur einmal eingeht.

Maximalfehler

Kann die statistische Unabhängigkeit nicht vorausgesetzt, und müssen Messgrößen als korreliert angenommen werden, so gelten auch nicht die obigen Kombinationsregeln für Verteilungen. Es wird dann der ungünstigste Fall angenommen, dass alle Messgrößen in einer Richtung und bis an den Rand des Fehlerintervalls abweichen, und man erhält das Fehlerfortpflanzungsgesetz für den *Maximalfehler*:

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \Delta c + \dots$$

Grenzwertabschätzung

Sind Auswertebeziehungen sehr komplex, so kann auch ein Grenzwert des Ergebnisses (Fehlergrenze) durch Einsetzen der Grenzen der Messwerte berechnet werden. Dabei muss berücksichtigt werden, in welcher Weise die Einzelgrößen in den Rechenausdruck eingehen (Summand/Subtrahend; Zähler/Nenner). Der Fehler ergibt sich dann als Differenz zwischen Grenz- und Ergebniswert:

$$\begin{aligned} \text{Ergebnis } z &= f(a, b, \dots) \\ \text{oberer Grenzwert } z_+ &= f(a_+, b_+, \dots) \\ \text{Fehler } \Delta z &= z_+ - z \end{aligned}$$

Unmittelbare Messgleichung

Vor Beginn einer Fehlerfortpflanzungsrechnung muss die Auswertegleichung auf die unmittelbaren Messgrößen zurückgeführt werden, um irrtümliche Fehlerbeiträge durch redundante Größen in Zwischenwerten oder Korrelationen erkennen zu können. Trivialbeispiel:

Als Aufgabe sei das Verhältnis zweier Gewichtskräfte $G = m \cdot g$ zu berechnen. Bei vorausgehender Einzelberechnung von G_1 und G_2 ginge in das Verhältnis G_1/G_2 zweimal der relative Fehler der Fallbeschleunigung g ein, während die Fallbeschleunigung tatsächlich aus dem Verhältnis herausfällt.

Grafische Auswertung von Funktionen

Die experimentelle Untersuchung und Auswertung von Funktionen umfasst die *qualitative* Beurteilung der Funktionsart und die *quantitative* Bestimmung der Parameter (Achsenabschnitt und Anstieg als Beispiel bei einer linearen Funktion). Für die qualitative Beurteilung ist stets eine grafische Darstellung erforderlich, die gleichzeitig ein leistungsfähiges Hilfsmittel für die quantitative Auswertung ist. Die Auswertung der Parameter kann bei Vorgabe eines Funktionstyps auch numerisch erfolgen (Lineare Regression für Geraden; Ausgleichsrechnungen für beliebige Funktionen), wobei der numerische Aufwand jedoch vergleichsweise hoch ist. Darüber hinaus vermittelt die grafische Auswertung von Funktionen praktische Erfahrungen bei der kritischen Bewertung von Funktionsverläufen.

Eine grafische Auswertung ist für lineare oder "linearierte" Funktionen möglich; die Methoden sind in einem gesonderten Abschnitt beschrieben (GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN).

Die Fehlerabschätzung ist dabei sehr einfach und geht vom oben beschriebenen Grenzwertprinzip aus. Neben der *Anpassungsgeraden* (Bestgerade) mit den Parametern a (Achsenabschnitt) und m (Anstieg) wird eine *Grenzgerade* konstruiert, die die Grenzwerte a_G und m_G der Parameter liefert, und damit entsprechend (26) auch die Fehler. Die Ergebnisse sind dann:

$$\begin{aligned} a &= (a \pm \Delta a) \text{ mit } \Delta a = a_G - a \text{ und} \\ m &= (m \pm \Delta m) \text{ mit } \Delta m = m_G - m \end{aligned}$$

Einzelheiten zur Konstruktion von Anpassungs- und Grenzgeraden, zur Linearisierung von Funktionen und zur rechnerischen Auswertung sind in der o.g. Darstellung zu finden.

Methodische Ergänzungen

Darstellung der Ergebnisse (Ergebnisintervalle)

Eine klare und übersichtliche Form der Darstellung der Ergebnisse als Ergebnisintervalle besteht in der Angabe der Intervallmitte (Ergebniswert) und dem Intervallradius (Fehler):

$$\text{(Beispiel)} \quad I = (27,4 \pm 0,5) \text{ mA}$$

Diese Darstellungsart ist im Praktikum zu bevorzugen. Eine alternative Schreibweise besteht darin, den Fehler in Bezug auf die letzten angegebenen Stellen in Klammern an den Ergebniswert anzufügen; das Beispiel (28) lautete dann:

$$\text{(Beispiel)} \quad I = 27,4(5) \text{ mA.}$$

Für Werte ohne Fehlerangaben aus sonst verlässlichen Quellen wird konventionsmäßig ein Fehler von 1 (einer Einheit) in der letzten angegebenen Stelle angenommen.

Beitragende und nicht beitragende Fehler

Auch Fehler sind Schätzwerte, deren eigene Genauigkeit meist ein bis mehrere Größenordnungen unterhalb der der Ergebnisse liegt. Das Ziel einer Fehlerrechnung kann daher darauf beschränkt bleiben, den wesentlichen Anteil einer zu erwartenden Abweichung zu erfassen, wobei kleinere Beiträge vernachlässigt werden können; insbesondere auch unter dem Gesichtspunkt der Charakteristik des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes und zusätzlicher, systematischer Auf rundungen im Rechengang (siehe folgender Abschnitt).

Kleine Fehlerbeiträge können bei der Fehlerfortpflanzung somit außer acht gelassen werden, was den Rechenaufwand verringert.

Fehler sind als klein zu betrachten, wenn sie eine halbe Größenordnung (Faktor 3) oder mehr unter anderen Fehlerbeiträgen liegen.

Rundung der Fehler

Aus den gleichen Gründen, d.h. wegen der geringen Genauigkeit der Fehlerwerte selbst, ist es auch nicht sinnvoll, in den Zahlenangaben die Fehler mit mehr als einer *zählende Stelle* anzugeben, womit die Genauigkeit der Fehler im ungünstigsten Fall auf einen Faktor 2

gleich 100 % reduziert wird (im Wertebereich zwischen 1 und 2).

Dabei darf jedoch nicht die Voraussetzung, d.h. die vorgegebene statistische Sicherheit verletzt werden:

Fehlerintervalle dürfen nur *aufgerundet* werden!

Werden Auswertungen nicht geschlossen durchgerechnet, sondern Zwischenwerte notiert und später wieder aufgenommen, so sollen Fehlerangaben zweistellig berücksichtigt werden, um ein beitragendes Anwachsen von Rundungsfehlern zu vermeiden.

Zahlendarstellung der Ergebnisse

Letztlich darf auch die Zahlendarstellung der Ergebnisse keine unzutreffende Genauigkeit vortäuschen und keine höhere Auflösung besitzen, als durch die Fehler vorgegebenen wird. Durch Rechenschritte (Multiplikation/Division) ergeben sich oft *überschüssige* Stellen, die dann (hier "kaufmännisch") gerundet werden müssen:

Zahlenwörter der Ergebnisse und Fehler müssen in der gleichen Stelle (Zehnerpotenz) enden.

Eine konsistente Angabe nach der Berechnung eines Widerstandswertes [$U = (9,13 \pm 0,06) \text{ V}$; $I = (243 \pm 3) \text{ mA}$] wäre:

$$\text{(Beispiel)} \quad R = (37,6 \pm 0,9) \Omega$$

Falsch wäre es, im Ergebnis mehr als eine Stelle nach dem Komma anzugeben, da diese Stellen im Rahmen des Fehlers alle beliebigen Ziffernwerte annehmen könnten, und somit ohne Aussage sind;

$$\text{(Beispiel) Falsch:} \quad R = (37,5720 \pm 0,8) \Omega$$

Andererseits sind auch Nullen zählende und gleichberechtigte Ziffern und dürfen nicht unterschlagen werden, wenn sie zur Bezeichnung der *Zahlenauflösung* gebraucht werden. Ist eine Spannung bei einem Fehler von 0,06 V sehr korrekt auf 9,00 V eingestellt worden, so wäre es falsch, die Nullen nicht zu notieren:

$$\text{(Beispiel) Falsch:} \quad U = (9 \pm 0,06) \text{ V}$$

Schlussbemerkung

Fehler können *immer* abgeschätzt werden!

Nur gibt es oft Situationen, wo dies nicht rein schematisch geschehen kann, sondern eine differenzierende und kritische Betrachtung der Messumstände erfordert. Grundsätzlich falsch ist insbesondere die Behauptung, dass Fehler nicht abgeschätzt werden können, weil sie zu klein oder zu groß seien!

ANLAGE II	GPI
GRAFISCHE DARSTELLUNGEN	

und

GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN

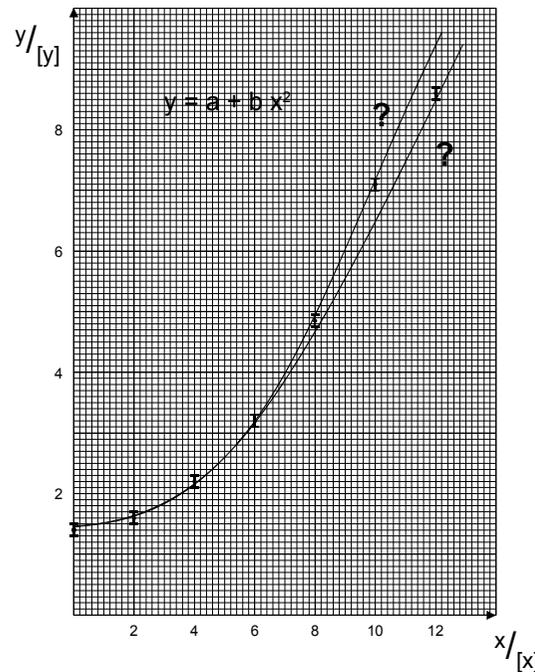
Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte.

Der Mensch besitzt ein sehr großes visuelles Aufnahmevermögen. Dies ist die Grundlage der Leistungsfähigkeit grafischer Darstellungen, mit denen Information in herausragender Weise veranschaulicht und vermittelt werden kann.

Grafische Darstellungen dienen der anschaulichen Darstellung von Messergebnissen, erlauben schließende Beurteilungen und Vergleiche, ermöglichen eine effiziente Auswertung der Parameter und stellen eine praktische Form der Darstellung numerischer Zusammenhänge als Tabellenersatz dar.

Grafische Darstellungen sind darüber hinaus nützliche Hilfsmittel zur augenblicklichen Kontrolle einer Messung. Es ist in vielen Fällen vorteilhaft, eine Messung nicht nur in Form der Zahlenwerte zu dokumentieren, sondern zusätzlich während der Messung grafisch darzustellen. Sprünge in einer sonst glatten Kurve machen dann auf etwaige Messfehler aufmerksam und ermöglichen eine unmittelbare Prüfung der Messumstände, die später nur aufwendig oder unter Umständen gar nicht mehr durchgeführt werden kann (Fehler beim Ablesen eines Instrumentes, Messbereichsumschaltungen, plötzliche Änderung der Messbedingungen, Defekt eines Gerätes; siehe nachfolgendes Beispiel). Die sofortige Beurteilung der Messung hilft darüber hinaus, Parameter des Experiments besser zu wählen, lässt die Streuung der Messwerte erkennen und macht schnelle Auswertungen von Zwischenergebnissen möglich.

Der Einsatz von Taschenrechnern und Computern kann grafische Darstellung nicht ersetzen, vielmehr sind grafische Darstellungen oft die Voraussetzung für den sinnvollen Einsatz von Rechnern. Modellselektion für die Anpassungen, Eliminierung von Ausreißern u.ä. sind Probleme, mit denen selbst Großrechner überfordert sein können, die der Mensch aber durch einen Blick auf eine grafische Darstellung lösen kann.



Beispiel 1: Qualitative Überprüfung einer Potenzfunktion durch eine linearisierte Darstellung.

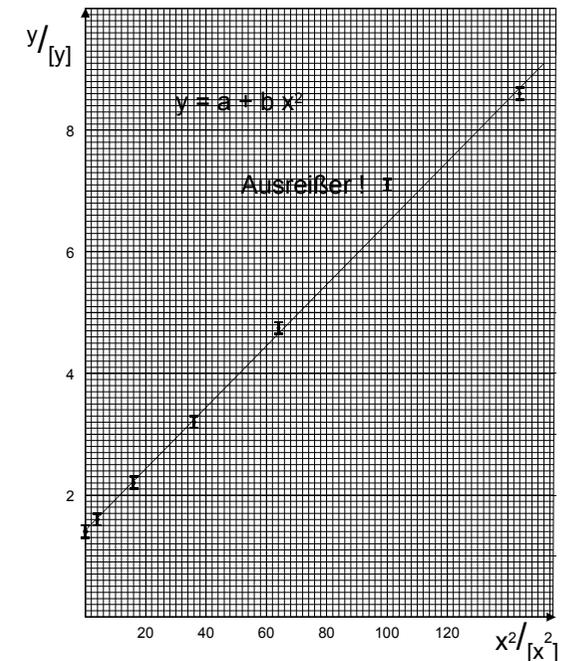
Die direkte Darstellung (oben) ermöglicht keine eindeutige Entscheidung über den gemessenen Kurvenverlauf.

Die linearisierte Darstellung (rechts) lässt dagegen den wahrscheinlichen Funktionsverlauf klar erkennen. Bei einer messbegleitenden Anfertigung der grafischen Darstellung hätte die vermutliche Falschmessung (Ausreißer) rechtzeitig erkannt und überprüft werden können.

Grafische Darstellungen

Die Aussagekraft grafischer Darstellungen hängt stark von ihrer inhaltlichen und äußeren Form ab.

Dazu gehören: die Wahl der *dargestellten Größen*, des *Koordinatensystems* (rechtwinklige Koordinaten, Polarkoordinaten), der *Achsenenteilung* (linear, logarithmisch), des *Achsenmaßstabes* und des dargestellten



Bereichs und nicht zuletzt eine *sorgfältige und saubere Ausführung* der Darstellung. Eine grafische Darstellung muss so ausgeführt werden, dass sie den Sachverhalt vollständig und korrekt wiedergibt. Durch die Art der Ausführung darf weder Information verlorengehen, noch z.B. eine zu große Genauigkeit vorgetäuscht werden.

Netzpapier

Die Arbeitsexemplare grafischer Darstellungen (im Praktikum gleichzeitig Ausführungen für den Bericht) müssen auf (Original-) Netzpapier mit geeigneten Achsenteilungen angefertigt werden:

- *mm-Papier* für lineare Darstellungen,
- *einfach- und doppelt logarithmisches Papier* für die Darstellungen von Exponential- und Potenzfunktionen,
- *Polarkoordinatenpapier* und *Wahrscheinlichkeitspapier* für Polarfunktionen und Normalverteilungen etc.

Achsenmaßstäbe und Achsenteilungen

Die Achsenmaßstäbe und die dargestellten Intervalle müssen so gewählt werden, dass die durch die Messung gegebene Information vollständig und beurteilbar (übersichtlich) wiedergegeben wird.

Durch die Wahl des Maßstabes und des Ausschnittes dürfen im Rahmen der endlichen Zeichengenauigkeit weder Information noch Genauigkeit verloren gehen.

Zeigen die dargestellten Größen eine ausgeprägte Abhängigkeit voneinander, so sollte die zur Verfügung stehende Fläche voll ausgeschöpft werden. Wird das Verhalten einer mehr konstant bleibenden Größe dargestellt, so ist ein geeigneter Kompromiss zu wählen. Ein zu wenig gestreckter Maßstab würde mögliche Tendenzen nicht erkennen lassen, ein zu stark gestreckter Maßstab wegen der Streuung der Messwerte eine unübersichtliche und schlecht zu beurteilende Punktwolke ergeben ("Sternenhimmel").

Die Darstellung muss eine vollständige Beurteilung des Sachverhaltes ermöglichen.

So muss bei einer erwarteten Nullpunktgeraden der Nullpunkt in die Darstellung einbezogen werden, um den Verlauf der (u.U. extrapolierten) Ausgleichsgeraden am Nullpunkt beobachten und beurteilen zu können.

Die Teilung der Achsen soll einfach sein.

Z.B. ein, zwei oder fünf Einheiten pro cm des Netzpapiers bei linearen Darstellungen. Komplizierte Teilungen machen das Ablesen und Eintragen mühsam und sind häufige Ursache von Fehlern.

Achsenbezeichnungen

Die Hauptteilstriche der Achsen müssen mit Maßzahlen versehen werden, die gesamten Achsen werden mit den durch die Einheiten dividierten Symbolen der dargestellten Größen bezeichnet.

Jeder Messwert ist ein Produkt aus Maßzahl und Einheit, so dass die durch die Achsen dargestellten Maßzahlen allein Quotienten aus Größe und Einheit darstellen. Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wird empfohlen, Symbol und Einheitenzeichen (Zähler und Nenner) klar voneinander getrennt zu halten und nicht weiter miteinander zu verrechnen. z.B.:

$$\frac{v}{10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \text{und nicht} \quad 10^2 \frac{v}{\text{ms}^{-1}}$$

$$\frac{1}{T} / 10^{-3} \text{K}^{-1} \quad \text{und nicht} \quad \frac{10^3}{T} \text{K}$$

Falsch ist es, Einheiten in eckige Klammern zu setzen.

Eckige Klammern werden um Größen zur Bezeichnung deren Einheit gesetzt, z.B. [p] = mmHg.

Eintrag der Messwerte

Messwerte werden durch Punkte, Kreuze oder kleine Kreise markiert.

Die Fehler können direkt in Form von *Fehlerbalken* in die Darstellung eingetragen werden. Im Allgemeinen ist es ausreichend, nur einige, repräsentative Fehlerbalken einzuzeichnen.

Kurven (Ausgleichskurven, Theoriekurven)

Durchgezogene Kurven in grafischen Darstellungen können (im Allgemeinen zwei) unterschiedliche Bedeutungen haben. Die genaue Bedeutung einer durchgezogenen Kurve muss deshalb in der Darstellung erläutert werden.

Zum einen können *Ausgleichskurven* (Anpassungskurven) zu den Messpunkten als durchgezogene Linien eingetragen werden. Als Ausgleichskurve bezeichnet man eine Funktionskurve, deren qualitative Form durch eine zugrunde gelegte Theorie bzw. ein Modell vorgegeben wird, deren quantitativer Verlauf aber (Parameter) möglichst gut (Minimum der quadratischen Abweichung) den Messwerten angepasst wird.

Zum anderen können auch rein theoretische Verläufe (*Theoriekurven*) durch durchgezogene Linien gekennzeichnet werden, wobei die Funktion qualitativ und quantitativ durch modellmäßige Überlegungen vorgegeben ist.

Nicht sinnvoll ist es, Messpunkte einzeln durch einen *Polygonzug* zu verbinden! Zum einen widerspricht das der statistischen Zufälligkeit der einzelnen Messwerte,

zum anderen verhalten sich, zumindest im makroskopischen Bereich, physikalische Vorgänge im Allgemeinen stetig differenzierbar, d.h. "glatt".

Legende (Bezeichnungen)

Die gesamte Darstellung muss eine ausreichende und eindeutige Erklärung des dargestellten Zusammenhangs enthalten (Legende)!

Dazu gehören sowohl übergeordnete Bezeichnungen des dargestellten Sachverhaltes (z.B. "Drehbewegung; Winkel-Zeit-Gesetz") als auch Hinweise, die den Zusammenhang zum Protokoll herstellen oder die genaueren Messumstände beschreiben (z.B. "Messreihe II; ohne Zusatzgewichte").

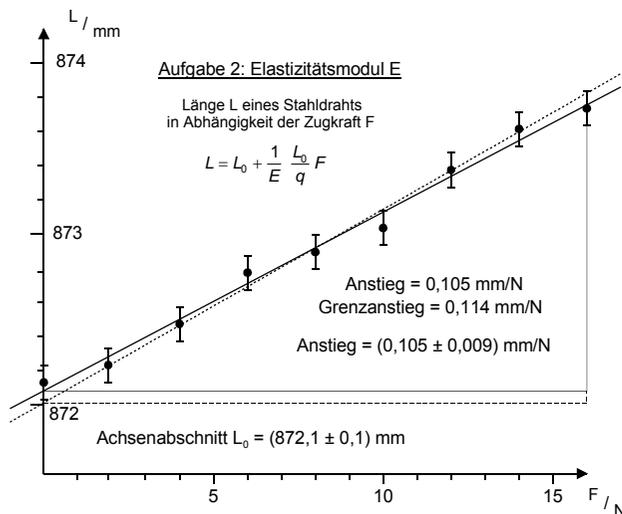
GRAFISCHE AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN

Die numerische Auswertung bzw. Anpassung einer Funktion an eine Stichprobe zufällig streuender Messwerte erfordert erheblichen rechnerischen Aufwand. Häufigste Aufgabe ist es, eine Ausgleichsgerade, d.h. eine lineare Funktion anzupassen (*lineare Regression*).

Dies kann einfach, anschaulich und mit sehr gutem Ergebnis mit Hilfe einer grafischen Darstellung durchgeführt werden, indem, unter kritischer Rücksichtnahme auf die Lage und Verteilung der Punkte, zu den Messwerten eine Ausgleichsgerade (Bestgerade) gewählt und (mit dem Lineal) eingetragen wird (siehe Beispiel 2 auf der Folgeseite).

Die Leistungsfähigkeit dieser "visuellen Mittelwertrechnung" wird deutlich beim Vergleich mit den aufwendigen Rechenausdrücke des numerischen Verfahrens (siehe Darstellung *LINEARE REGRESSION*).

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass auch bei einer numerischen Auswertung die Anfertigung einer grafischen Darstellung zur Beurteilung der Anpassung unerlässlich ist, denn: das Rechenverfahren passt an jede vorliegende Punktemenge eine Gerade an, auch wenn die Werte keinem linearen Verlauf folgen.



Beispiel 2: Grafische Auswertung einer linearen Funktion (auf Darstellung eines mm-Netzes wurde aus wiedergabetechnischen Gründen verzichtet)

Konstante Fehler $\Delta L = 0,1$ mm und $\Delta F = 0,001$ N (Gewichtskraft $m \cdot g$; Wägefehler 0,1 g). Der Fehler ΔF kann im Rahmen von ΔL und der Zeichengenauigkeit vernachlässigt werden. Qualitativ wird ein linearer Zusammenhang gut wiedergegeben. Die Streuung des Messpunkts stimmt mit den Fehlerbalken überein. Anstiegsquotienten:

$$\text{Anstieg} = \frac{(873,76 - 872,08) \text{ mm}}{(16 - 0) \text{ N}} = 0,105 \text{ mm/N}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(873,84 - 872,02) \text{ mm}}{(16 - 0) \text{ N}} = 0,114 \text{ mm/N}$$

Auch höhere Funktionen können durch geeignete Linearisierungen grafisch angepasst werden (s.u.).

Nichtlinearisierbare Funktionen lassen sich nur numerisch auswerten, wobei der rechnerische Aufwand allerdings außerordentlich hoch ist. Grundlage aller Anpassungsverfahren ist die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate.

Grafische Parameterschätzung linearer Funktionen

Entsprechend der Fehlerstatistik sollte die zufällige Streuung von Messpunkten einer Normalverteilung folgen:

Die Ausgleichsgerade ist somit so zu wählen, dass die Messpunkte symmetrisch zu ihr liegen, wobei einzelne, weit entfernte Punkte unberücksichtigt bleiben dürfen, da sie eine große Irrtumswahrscheinlichkeit besitzen (Ausreißer).

Ist neben der zufälligen Streuung eine systematische Tendenz erkennbar (z.B. eine leichte Krümmung), so müssen dem physikalischen Problem oder der Messmethode angemessene zusätzliche Kriterien berücksichtigt werden (siehe ergänzende Hinweise).

Hervorragend geeignet zur Festlegung einer Ausgleichsgeraden ist ein Plexiglaslineal (durchsichtige Folie), das in der Mitte einen schwarzen Strich (Linie) ohne jede weiteren Markierungen oder Teilungen trägt.

Schätzwerte für die Parameter der Funktion (Achsenabschnitt, Anstieg) können dann durch die Ausgleichsgerade bestimmt werden:

Der Achsenabschnitt kann direkt am Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der y-Achse (die dann auch über der Stelle $x = 0$ errichtet sein muss) abgelesen werden.

Zur Bestimmung des Anstieges wird ein Anstiegsdreieck festgelegt, und der Differenzenquotient berechnet.

Das Anstiegsdreieck soll möglichst groß gewählt werden, um Ablesefehler aus der Darstellung vernachlässigbar klein zu halten. Wegen der zufälligen Streuung der Messpunkte wird man selten Messpunkte selbst zur Berechnung des Differenzenquotienten heranziehen können. Zur Kontrolle der Auswertung soll das Anstiegsdreieck mit in die Darstellung eingetragen werden.

Bei der Bestimmung der Parameter ist zu berücksichtigen, dass die Variablen im Allgemeinen dimensionierte Größen sind, und auch Achsenabschnitt und Anstieg (Differenzenquotient) dementsprechend Einheiten tragen.

Grafische Fehlerschätzung

Zur grafischen Bestimmung der Fehler wird zusätzlich eine *Grenzgerade* zugrunde gelegt und eingetragen.

Die Grenzgerade ist eine Gerade, die mit den Messwerten unter Berücksichtigung von Streuung und Fehlerbalken noch verträglich ist. Die Wahl der Lage der Grenzgeraden erfordert eine kritische Betrachtung der Messwerte unter Berücksichtigung von Streuung und Fehlerbalken. (Im Rahmen des Praktikums ist es für alle Fälle ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden festzulegen).

Die Grenzgerade markiert auf der Ordinate (y-Achse) direkt das Fehlerintervall Δy . Als Fehler des Anstieges wird die Differenz zwischen Ausgleichsanstieg und Grenzanstieg herangezogen.

Im Sinne der Fehlerbetrachtung ist eine Messung als konsistent zu betrachten, wenn die Fehlerbalken und die mittlere Streuung von etwa gleicher Größe sind. Zu kleine Fehlerbalken lassen auf unberücksichtigte Fehlerquellen oder eine falsche oder knappe Fehlerabschätzung schließen. Zu große Fehlerbalken deuten wieder auf inkorrekte Fehlerabschätzungen oder auf zusätzliche systematische Fehler hin. Beispiel:

Misst man eine Spannung (z.B. in Abhängigkeit von der Belastungsstromstärke), so wird die Streuung der Werte wesentlich kleiner als der durch die Güteklasse des Messinstrumentes gegebene Fehler bleiben. Die Güteklasse beschreibt im Wesentlichen den systematischen Kalibrierfehler des Messwerkes. Für die Fehler der Parameter folgt, dass der Achsenabschnitt mit der vollen, durch die Güteklasse bedingten Unsicherheit behaftet ist. Der Anstieg kann jedoch mit einer besseren, aus der Streuung resultierenden Genauigkeit angegeben werden, da eine systematische Verschiebung der Punkte nach oben oder nach unten den Anstieg nicht beeinflusst.

Im allgemeinen kann die Wahl der Grenzgeraden aus den genannten Gründen mehr an der Streuung der Messpunkte orientiert werden, wobei als zusätzliches Kriterium die Anzahl der Messwerte berücksichtigt werden muss (entsprechend der Steigerung der Genauigkeit des Mittelwertes mit der Zahl der Messwerte). Aber:

Eine korrekte Berücksichtigung der Zahl der Messpunkte ist visuell jedoch nur schwer möglich, und grafische

Auswertung liefern in der Regel deutlich zu große Fehler.

Liegen höhere Anforderungen an die Vergleichbarkeit und Genauigkeit der Fehleraussagen vor, so muss auf eine numerische Auswertung zurückgegriffen werden.

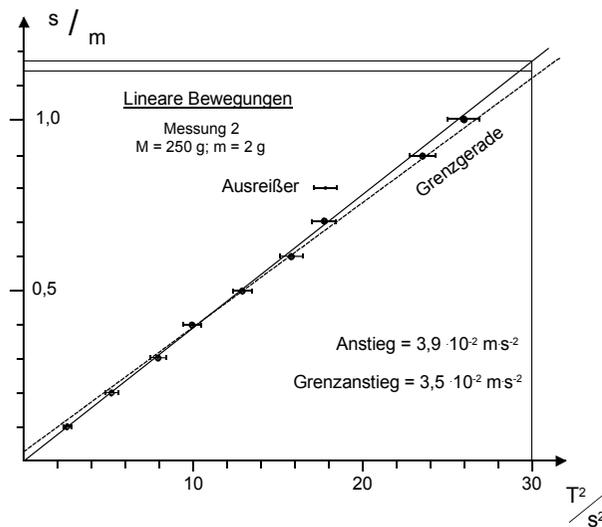
Auswertung nichtlinearer Funktionen

Offt müssen nichtlineare Funktion überprüft und ausgewertet werden, eine visuelle Beurteilung und grafische Auswertung ist jedoch nur für lineare Zusammenhänge möglich.

In vielen Fällen kann aber durch Wahl geeigneter Variablen (Substitution) oder durch eine rechnerische Umformung (Transformation) eine Linearisierung der Funktion bzw. der Darstellung erreicht werden.

Variablensubstitution

Die Parabel $s = \frac{1}{2} a t^2$ wird linear, wenn s nicht gegen t , sondern gegen t^2 aufgetragen wird (siehe folgende Beispiel). Die "Projektion" $K = K_0 \cos \omega t$ wird (im Bereich für ωt von 0 bis $\pi/2$) linear, wenn K nicht gegen t , sondern gegen $\cos \omega t$ aufgetragen wird.



Beispiel 3: Auswertung einer quadratischen Funktion durch linearisierte Darstellung

Konstante Messfehler $\Delta s = 0,001 \text{ m}$ (vernachlässigbar) und $\Delta t = 0,04 \text{ s}$. Der Fehler von t^2 beträgt $\Delta t^2 = 2 t \Delta t$. Da eine Nullpunktgerade erwartet wird und im Rahmen der Fehler offenbar auch vorliegt, werden Ausgleichsgerade und Grenzgerade durch den Nullpunkt gelegt.

$$\text{Anstieg} = \frac{(1,17 - 0) \text{ m}}{(30 - 0) \text{ s}^2} = 3,90 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{(1,14 - 0) \text{ m}}{(30 - 0) \text{ s}^2} = 3,80 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$$

Einfachlogarithmische Darstellungen

Häufig sind Exponentialfunktionen (e-Funktionen) der Form

$$y = C e^{-kx}$$

auszuwerten. Eine Linearisierung von Exponentialfunktionen kann durch Logarithmieren der Funktionsgleichung erreicht werden:

$$\ln y = \ln C - k x \quad \text{oder} \quad \log y = \log C - k x \log e$$

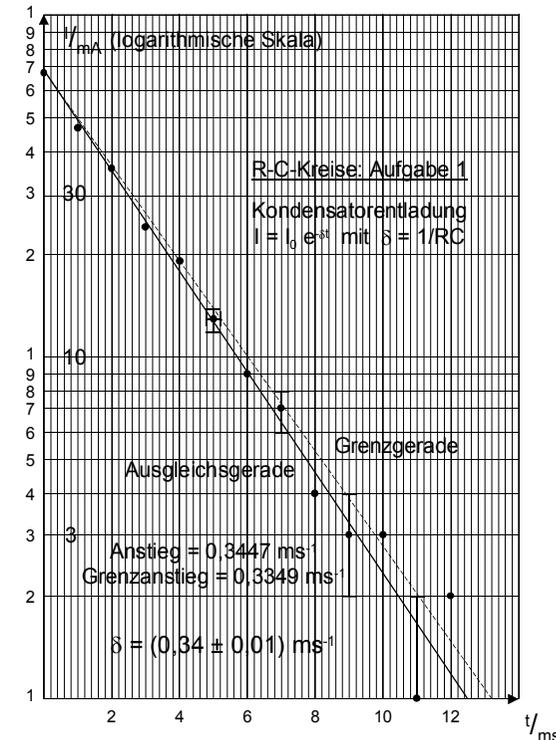
Formal ergibt sich daraus eine lineare Funktion, wenn zusätzlich $\ln y$ (bzw. $\log y$) als Variable substituiert wird.

Wegen der praktischen Bedeutung ist Netzpapier erhältlich, dessen eine Achse logarithmisch geteilt ist (einfachlogarithmisches Papier), so dass die y -Werte ohne Berechnung der Logarithmen direkt eingetragen werden können.

Dem Papier liegen üblicherweise dekadische Logarithmen zugrunde, wobei eine Einheit im logarithmischen Maßstab immer einer Dekade der Ausgangsgröße entspricht.

Die absolute Lage der logarithmischen Achse ist (genau wie bei linearen Teilungen) unbestimmt und muss in Zusammenhang mit der Größenordnung der Messwerte festgelegt werden.

Auswertung und Fehlerbestimmung erfolgen grundsätzlich wie vorstehend beschrieben. Auf zwei wichtige Punkte (Fehlerquellen!) soll jedoch hingewiesen werden.



Beispiel 4: Auswertung einer Exponentialfunktion durch einfachlogarithmische Darstellung.

Logarithmus des Stroms über der Zeit bei einer Kondensatorentladung. Die Messfehler der Strom- und Zeitwerte betragen einheitlich 1 mA bzw. 0,5 ms. Zur Berechnung des Anstiegs wurden jeweils die beiden I - und t -Achsenabschnitte herangezogen.

$$\text{Anstieg} = \frac{\ln 1 - \ln 68 = \ln \frac{1}{68}}{12,24 \text{ ms}}$$

$$\text{Grenzanstieg} = \frac{\ln 1 - \ln 68 = \ln \frac{1}{68}}{12,60 \text{ ms}}$$

Bei der Bestimmung des Differenzenquotienten muss berücksichtigt werden, dass das Logarithmieren der Variablen durch einen logarithmischen Maßstab ersetzt wurde, und die logarithmische Achse weiterhin die Zahlenwerte der Ausgangsgröße trägt.

Für die Berechnung des Differenzenquotienten können der Darstellung somit nur (zwei) y -Werte entnommen werden, die dann logarithmiert werden müssen. Da diese rechnerische Auswertung von der grafischen Darstellung unabhängig ist, wird man natürliche Logarithmen wählen um den Exponentialkoeffizienten (k) direkt zu erhalten.

Auch die Konstruktion der Grenzgeraden erfordert eine besondere Betrachtungsweise:

Durch die "Streckung" des Maßstabes "nach unten" nehmen (bei konstanten Fehlern) die Streuung der Messwerte und die Größe der Fehlerbalken mit kleiner werdenden Werten stark zu. Der logarithmische Maßstab *wichtet* die Messpunkte mit ihren relativen Fehlern, also mit der Genauigkeit (im logarithmischen Maßstab werden durch gleiche Strecken gleiche Faktoren dargestellt). Entsprechend muss die Lage der Ausgleichsgeraden und der Grenzgeraden mehr an den größeren Messwerten mit ihrer besseren Genauigkeit (ihrem größeren Gewicht) orientiert werden.

Doppeltlogarithmische Darstellungen

Potenzfunktionen mit beliebigem Exponenten können durch eine doppeltlogarithmische Darstellung linearisiert werden.

Anzahl und Lage der Messpunkte

Als grundsätzliches Problem bei der experimentellen Überprüfung funktionaler Abhängigkeiten müssen Überlegungen über die Anzahl und Lage der Messpunkte getroffen werden, wobei die Maximalforderung (unendlich viele, infinitesimal dichte Messwerte) durch das Auflösungsvermögen und die zur Verfügung stehende Zeit eingeschränkt werden.

Bei einfachen Kurvenformen (lineare Funktion oder linearisierbare Funktionen) und geringerer Streuung kann eine (aus statistischer Sicht sehr geringe Anzahl) von zehn Messwerten ausreichend sein.

Für die Wahl der Lage der Punkte ist zu berücksichtigen, ob die Funktion noch qualitativ überprüft oder nur quantitativ ausgewertet werden muss. Für eine qualitative Überprüfung ist eine äquidistante Lage der Messwerte günstig. Muss (im anderen Fall) bei gesichertem linearen Verlauf nur noch der Anstieg einer Geraden bestimmt werden, so ist es besser, ein möglichst großes Intervall mit den Messwerten abzudecken, und jeweils die Hälfte der Messungen an der unteren und oberen Intervallgrenze durchzuführen.

Ergänzende Hinweise

In vielen Fällen ist eine formalistische und unkritische Anwendung der angegebenen Grundsätze nur bedingt möglich. Im Folgenden werden einige Sonderfälle diskutiert und Beispiele für Anpassungen von grafischen Darstellungen an spezielle Anforderungen gegeben.

In einem Experiment wird ein linearer Zusammenhang erwartet. Die Messung ergibt aber einen gekrümmten Verlauf der Messpunkte. Ist die Krümmung ausgeprägt systematisch, so muss angenommen werden, dass eine als konstant vorausgesetzte Größe eine Abhängigkeit von den Messgrößen zeigt. Sehr unsystematische Krümmungen sind schwieriger zu erklären und lassen zusätzlich auf Fehler bei der Messung oder Auswertung schließen.

Bei Messung einer Dampfdruckkurve wird (in einer geeigneten logarithmischen Darstellung) des Dampfdruckes in Abhängigkeit von der Temperatur eine Gerade erwartet, wobei die Verdampfungswärme als Konstante in den Anstieg eingeht. Da die Verdampfungswärme aber von der Temperatur abhängt, ergibt sich ein gekrümmter Kurvenverlauf. Für einen solchen Fall kann eine Tangente in einem Punkt gewählt werden, aus deren Anstieg sich die Verdampfungswärme für diese bestimmte Temperatur ergibt.

In anderen Fällen kann aber auch eine Ausgleichsgerade angemessen sein, die alle Messpunkte berücksichtigt, und damit eine Mittelung darstellt. Aus dem Anstieg werden entsprechend gemittelte Werte resultieren.

In beiden Fällen muss die spezielle Auswertung auch bei der Fehlerbestimmung berücksichtigt werden (bei der Mittelung z.B. durch eine Grenzgerade, die die gesamte Krümmung erfasst).

Unerwartete Kurvenverläufe machen eine kritische Diskussion der Messung notwendig. Sie haben immer einen Grund, der herausgefunden werden muss. Ein unkritisches Aufgeben der Auswertung ("es ist etwas Falsches herausgekommen") geht an der elementaren Problemstellung vorbei, aus Messung und Beobachtungen eine Aussage abzuleiten.

Es kann vorkommen, dass die Menge der Messpunkte klar in mehrere Bereiche unterteilt ist, die entweder verschiedene Anstiege haben, oder gegeneinander versetzt sind. Wieder ist abzuschätzen, ob die beobachteten Vorgänge selbst dafür verantwortlich sind (z.B. durch Überlagerung verschiedener Beiträge, die dann durch eine geeignete Auswertung auseinanderzuhalten wären), oder ob nicht berücksichtigte Einflüsse durch das Experiment (z.B. Messbereichsumschaltungen) oder Fehler in der Auswertung vorliegen. In jedem Fall muss das beobachtete Verhalten oder die vermuteten Fehler durch eine kritische Diskussion erklärt werden.

Grafische Darstellungen werden häufig zum Vergleich verschiedener Vorgänge herangezogen, die in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt sind. Liegen die zu vergleichenden Punktemengen weit auseinander, so wird die Darstellung, bzw. der Vergleich unbefriedigend. Es müsste ein großer Maßstab verwendet werden, um die Messwerte gemeinsam darstellen zu können, der aber eine sehr geringe Empfindlichkeit für die einzelnen Messungen zur Folge hätte.

Beispiel: Für Wasser und eine bestimmte Glassorte soll der Brechungsindex in Abhängigkeit von der Wellenlänge dargestellt werden (Dispersion). Beide Größen sind nur wenig abhängig von der Wellenlänge, haben aber eine große Differenz untereinander. Eine geeignete Darstellung erhält man, indem man einen gestreckten Maßstab wählt, aber beide Messungen "übereinander schiebt", und jeder der Messungen eine eigene Achse einrichtet.

Übereinanderlegungen, Weglassen eines Teiles (Zwischenteiles) einer Achse oder Verändern von Maßstäben gehören zu den gebräuchlichen Methoden in vergleichenden grafischen Darstellungen.

ANLAGE III

Maße und Einheiten (SI)

GPI

Physikalische Größen

Ein Grundbegriff der Physik ist die *physikalische Größe*. Man bezeichnet damit eine zumindest prinzipiell beobachtbare und messbare Erscheinung, mit Hilfe der ein physikalischer Vorgang beschrieben werden kann. Einfache physikalische Größen sind Länge, Zeit, Geschwindigkeit, Kraft, Arbeit, elektrische Spannung, magnetische Feldstärke, Temperatur, u.s.w.

Man unterscheidet *Grundgrößen* (Basisgrößen), die axiomatisch festgelegt werden, und *abgeleitete Größen*, die sich durch physikalische Zusammenhänge aus den Grundgrößen darstellen lassen.

Alle Größen sind gleichberechtigt, und die Festlegung einer bestimmten Grundgrößen-Basis ist konventionell. Durch internationale Vereinbarungen ist ein System festgelegt (*SI; Système International d'Unites*), das auf folgende Grundgrößen aufbaut:

Länge L
 Masse m
 Zeit t
 Ladungsstrom I (elektrische Stromstärke)
 Temperatur T
 Stoffmenge ν
 Lichtstärke I (physiologische Zusatzgröße)

Auch für die Symbolbezeichnungen der Größen (Buchstabensymbole) gibt es ein internationales Reglement, an das sich im Praktikum und innerhalb der Vorlesungskurse weitgehend gehalten wird. Eine Zusammenstellung ist weiter unten aufgeführt.

Dimension und Einheit

Die physikalischen Größen haben sowohl qualitative Eigenschaften als auch quantitative Ausprägungen.

Die Qualität einer Größe wird durch ihre *Dimension* bestimmt. Die Dimension der Grundgrößen entsprechen den Begriffen selbst (Länge, Masse, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge). Die Dimensionen der abgeleiteten Größen ergeben sich als Potenzprodukte der

Grunddimensionen. Die Dimension der Beschleunigung a ist demnach *Länge* durch *Zeit*², die der Kraft F (= *Masse* \times *Beschleunigung*) *Masse* mal *Länge* durch *Zeit*², die der Arbeit W (= *Kraft* \times *Weg*) *Masse* mal *Länge* durch *Zeit*².

Zur Bezeichnung der Dimension einer Größe (z.B. A) schreibt man:

$$\dim A = \frac{\text{Masse Länge}}{\text{Zeit}^2}$$

Die quantitative Angabe einer physikalischen Größe erfolgt durch eine *Maßzahl* und eine *Einheit*. Die Einheit legt eine Vergleichsgröße fest, und die Maßzahl sagt aus, wie oft diese Einheit in der zu beschreibenden Größe enthalten ist:

$$\text{Größenwert} = \text{Maßzahl} \times \text{Einheit}$$

Die Einheiten besitzen Namen und werden ebenfalls mit Buchstabensymbolen bezeichnet. Die Einheit der Zeit ist die Sekunde (1 s oder kurz s). Zur Bezeichnung einer (beliebigen) Einheit einer Größe benutzt man eckige Klammern. Will man ausdrücken, dass ein Druck in mm Quecksilbersäule angegeben wird, so schreibt man

$$[p] = \text{mm Hg}$$

Système Internationale d'Unites

Ein *Einheitensystem*, das auf eine Basis unabhängiger Grundgrößen aufbaut, und die Einheiten aller weiteren Größen als abgeleitete Einheiten aus den Verknüpfungsgleichungen herleitet, wird als *kohärentes Einheitensystem* bezeichnet.

Im Jahre 1948 beauftragte die 9. Generalkonferenz für Maße und Gewichte (CGPM) mit ihrer Resolution 6 das internationale Komitee für Maße und Gewichte (CIPM) damit, "*die Schaffung einer vollständigen Neuordnung der Einheiten im Messwesen zu prüfen*". Das daraufhin entstandene und weiterentwickelte System "*praktischer Einheiten*" führt den Namen *Système Internationale d'Unites* oder kurz *SI* und hat sich zunehmend in allen Bereichen der Physik, insbesondere der experimentellen Physik, und in den Gesetzgebungen der National-

staaten über Maße und Gewichte durchgesetzt und wird auch im Praktikum (fast) ausschließlich verwendet.

Das SI besteht aus den *Basiseinheiten*, den sogenannten *Ergänzungseinheiten* und den *abgeleiteten Einheiten*. Im Folgenden ist eine kurze Übersicht über das SI mit den *Vorsätzen für Teile und Vielfache* und einer Auswahl abgeleiteter Größen zusammengestellt.

Die Grundeinheiten-Basis des SI wurde für den Bereich der Photometrie um eine Einheit für die physiologisch bewertete Lichtstärke mit der Einheit Candela erweitert. Diese Größe wäre für den Aufbau eines rein physikalischen Einheitensystems nicht erforderlich.

Definitionen der Grundgrößen

- 1 Meter ist gleich der Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während eines Zeitintervalls von 1/299792458 Sekunden durchläuft. (Damit ist das Meter eine implizite Basisgröße, die sich auf die eigentlichen Grundgrößen Zeit und Lichtgeschwindigkeit aufbaut).
- 1 Kilogramm ist die Masse eines im *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) in Sèvres bei Paris aufbewahrten Zylinders von ca. 39 mm Durchmesser und gleich großer Höhe aus einer Legierung von 90 Teilen Platin und 10 Teilen Iridium (Massenprototyp).
- 1 Sekunde ist die Dauer von 9.192.631.770 Schwingungen der Strahlung des atomphysikalischen Übergangs in der Hyperfeinstruktur des Atoms ¹³³Cs, und zwar des ungestörten Überganges $F=4, m_F=0$ nach $F=3, m_F=0$ des $2S_{1/2}$ -Grundzustands.
- 1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern elektrodynamisch eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton je Meter Leiterlänge hervorruft.

- 1 Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. (Der Nullpunkt der Celsiusskala wurde exakt zu 273,15 K definiert).

Im Alltag wird weiterhin die Celsiusskala als Temperaturskala gebräuchlich bleiben. Für die Verwendung beider Skalen nebeneinander gilt:

Temperaturen können entweder in K oder in °C angegeben werden, wobei die Einheit Kelvin zu bevorzugen ist.

Zur Umrechnung gilt per Definition: T°C = T/K + 273,15.

Temperaturdifferenzen sind grundsätzlich in K anzugeben (z.B. 30,7 °C - 21,3 °C = 9,4 K).

- 1 Mol ist diejenige Menge eines Stoffes, die genau so viel Teilchen enthält, wie in 12 Gramm des Kohlenstoff-Nuklids ¹²C enthalten sind. (Diese Anzahl wird Avogadro'sche Zahl genannt).
- 1 Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz 540·10¹² Hz in eine bestimmte Richtung aussendet, in der die Strahlungsstärke 1/683 Watt durch Steradian beträgt.

Ergänzungsgrößen

Winkel	α	$\alpha = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$	$1 \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \text{ (rad= Radiant)}$
Raumwinkel	Ω	$\Omega = \frac{\text{Fläche}}{\text{Radius}^2}$	$1 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 1 \text{ (sr = Steradian)}$

Vorsätze für Teile und Vielfache

10 ⁻¹⁸	a- (Atto-)	10 ⁻²	c- (Zenti-)	10 ³	k- (Kilo-)
10 ⁻¹⁵	f- (Femto-)	10 ⁻¹	d- (Dezi-)	10 ⁶	M- (Mega-)
10 ⁻¹²	p- (Pico-)			10 ⁹	G- (Giga-)
10 ⁻⁹	n- (Nano-)	10 ¹	D- (Deka-)	10 ¹²	T- (Tera-)
10 ⁻⁶	μ- (Mikro-)	10 ²	h- (Hekto-)	10 ¹⁵	P- (Peta-)
10 ⁻³	m- (Milli-)			10 ¹⁸	E- (Exa-)
			wissenschaftlich weniger gebräuchlich und zu vermeiden		

Mechanik, Wärme, Hydrodynamik

Geschwindigkeit	v	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ m s}^{-1}$
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\omega = \frac{d\Phi}{dt}$	$\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$

Beschleunigung	a	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$	$1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ m s}^{-2}$
Winkelbeschleunigung	α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}$	$\frac{1}{\text{s}^2} = 1 \text{ s}^{-2}$
Frequenz	ν	$\nu = \frac{1}{T}$	$\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz (Hertz)}$
Kreisfrequenz	ω	$\nu = \frac{2\pi}{T}$	$\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$
Impuls	p	$p = m \vec{v}$	$1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = 1 \text{ kg m s}^{-1}$
Drehimpuls	L	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$
Kraft	F	$F = m \vec{a}$	$1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N (Newton)}$
Drehmoment	M	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	1 N m
Trägheitsmoment	I	$I = \int_V r^2 dm$	1 m ² kg
Arbeit Energie	W E	$W = \int F d\vec{s}$	1 N m = 1 J (Joule)
Leistung	P	$P = \frac{dW}{dt}$	$1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W (Watt)}$
Dichte	ρ	$\rho = \frac{dm}{dV}$	$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1 \text{ kg m}^{-3}$
Druck	p	$p = \frac{F}{A}$ ältere Einheiten	$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa (Pascal)}$ 1 bar (Bar) = 10 ⁵ Pa 1 Torr = 1,333 hPa
Wärmekapazität	C	$C = \frac{dQ}{dt}$	1 J K ⁻¹
Spannungskoeffizient	β	$p = p_0 (1 + \beta t)$	1 K ⁻¹
Dynamische Viskosität	η	$F = \eta A \frac{dv}{dz}$ ältere Einheiten	$1 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2 \text{ m/s}} = 1 \text{ Pa s}$ 1 P (Poise) = 0,1 Pa s
Kinematische Viskosität	ν	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ältere Einheit	$1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ 1 St (Stokes) = 10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹

Elektrodynamik

Elektrische Ladung	Q	$Q = \int I dt$	1 A s = 1 C (Coulomb)
Elektrisches Feld	E	$\vec{F} = Q \vec{E}$	$1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \text{ V m}^{-1}$
Elektrische Spannung	U	$U = \int \vec{E} d\vec{s}$	$1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = 1 \text{ V (Volt)}$
Magnetisches Feld (magnetische Erregung)	H	$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{A}$	$1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 1 \text{ A m}^{-1}$
Magnetisches Feld (magnet. Flussdichte)	B	$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} d\vec{A} \right)$ ältere Einheit	$1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)}$ 1 G (Gauß) = 10^{-4} T
Magnetischer Fluss	Φ	$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}$	1 V s = 1 W (Weber)
Widerstand	R	$R = \frac{U}{I}$	$1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \Omega$ (Ohm)
Impedanz	Z	$Z = \frac{U_0}{I_0}$	$1 \frac{\text{V}}{\text{A}} = 1 \text{ V A}^{-1}$
Kapazität	C	$I_C = -C \frac{dU}{dt}$	$1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ F (Farad)}$
Induktivität	L	$U_L = -L \frac{dI}{dt}$	$1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H (Henry)}$

Radioaktivität

Abklingkonstante	δ	$A = A_0 e^{-\delta t}$	$\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ s}^{-1}$
Aktivität	A	$A = \frac{\text{Zerfälle}}{\text{Zeit}}$ ältere Einheit	$\frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Bq (Bequerel)}$ 1 Ci (Curie) = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq

Empfohlene Formelzeichen für physikalische GrößenRaum und Zeit

x, y, z	Kartesische Ortskoordinaten	T	Zeit
r	Ortsvektor	T	Periodendauer
L, s	Weglänge	v, f	Frequenz
A, S	Fläche	ω	Kreisfrequenz
V	Volumen	τ	Abklingkonstante (Zeitkonstante)
α, β, ...	ebener Winkel	V	Geschwindigkeit
..., Θ, Φ		ω	Winkelgeschwindigkeit
ω, Ω	Raumwinkel	a	Beschleunigung
k	Kreiswellenzahl	α	Winkelbeschleunigung
α, δ	Abklingkonstante (Dämpfungskoeffizient)	g	Fallbeschleunigung
		c	Vakuumlichtgeschwindigkeit

Mechanik

M	Masse	ε	Dehnung
ρ	Dichte	E	Elastizitätsmodul
P	Impuls	G	Schubmodul
L	Drehimpuls	μ	Poisson-Zahl
I, J	Trägheitsmoment	η	dynamische Viskosität
F	Kraft	ν	kinematische Viskosität
G	Gewichtskraft	E	Energie
M	Drehmoment	E_p, V	potentielle Energie
p	Druck	E_k, T	kinetische Energie
σ	Normalspannung	W, A	Arbeit
τ	Schubspannung	P	Leistung

Thermodynamik

Q	Wärmearbeit	β	Spannungskoeffizient
T	Kelvin-Temperatur	λ	Wärmeleitfähigkeit
t	Celsius-Temperatur	A	Temperaturleitfähigkeit
S	Entropie	C	Wärmekapazität
U	Innere Energie	c	spezifische Wärmekapazität
F	Freie Energie	κ, γ	Isentropenindex c_p/c_v
H	Enthalpie		

Elektrizität und Magnetismus

Q	Ladung	B	magnetische Feldstärke (magn. Flussdichte)
ρ	Raumladungsdichte	Φ	magn. Fluss
σ	Flächenladungsdichte	μ_0	magn. Feldkonstante
V, Φ	Elektrisches Potential	μ	Permeabilität
U, V	el. Spannung	M	Magnetisierung
E	el. Feldstärke	X_m, κ	magn. Suszeptibilität
D	Dielektrische Verschiebung	J	magn. Polarisierung
ϵ	Dielektrizitätskonstante	R	Widerstand
ϵ_0	el. Feldkonstante	ρ	Spezifischer Widerstand
P	el. Polarisation	γ, σ	Leitfähigkeit
p	el. Dipolmoment	Z	Impedanz
I	(Ladungs-) Stromstärke	C	Kapazität
j	Stromdichte	L	Selbstinduktionskoeffizient
H	Magnetische Feldstärke (magn. Erregung)	S	Poynting-Vektor
		A	magn. Vektorpotential

Atom- und Kernphysik

e	Elementarladung	A	Massenzahl
N	Hauptquantenzahl	Z	Ordnungszahl (Ladungszahl)
L, l_i	Bahndrehimpulsquantenzahl	N	Neutronenzahl
S, s_i	Spinquantenzahl	λ	Zerfallskonstante
M, m_i	Orientierungsquantenzahl (Magnetquantenzahl)	τ	mittlere Lebensdauer
J, j_i	Gesamt-DrehimpulsQZahl der Elektronenhülle	T_{1/2}	Halbwertszeit
I, J	Kern-Spinquantenzahl	A	Aktivität
F	Gesamt-DrehimpulsQZahl eines Teilchens		

Das griechische Alphabet

Eine Reihe der großen und einige kleine Buchstaben ($\iota, \omicron, \upsilon$) stimmen mit den lateinischen Buchstaben überein oder sind ihnen so ähnlich, dass sie als Symbole keine Verwendung finden.

A	α	Alpha	I	ι	Jota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Y	υ	Ypsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	ϕ, φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	\omicron	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Teta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Physikalische Konstanten

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c =_{\text{Def}} 2,997922458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Gravitationskonstante	$\Gamma = 6,673(3) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Avogadro'sche Zahl	$L = 6,0220921(62) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molvolumen	$V_M = 22,41383(70) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Allgemeine Gaskonstante	$R = 8,31441(26) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Boltzmannkonstante	$k = 1,380652(43) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$\epsilon_0 = 8,854200352 \dots \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	$\mu_0 = 1,256637061 \dots \cdot 10^{-6} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Elementarladung	$e_0 = 1,6021829(22) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Spezifische Elektronenladung	$e_0/m_e = 1,7588115(24) \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6,626124(13) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Ruhemasse des Protons	$m_P = 1,6726355(17) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,1094634(99) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Klassischer Elektronenradius	$r_e = 2,8179378(70) \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Fallbeschleunigung für das Praktikumsgebäude (1. Obergeschoss)

$$\beta = 52^\circ 27' 35(5)''; \quad h = 59(3) \text{ m} \quad g = 9,812777(5) \text{ m s}^{-2}$$