

ANLAGE IV KERNSTRAHLUNGSDETEKTOREN

GPI

Kernstrahlungsdetektoren und Messelektronik



Geiger-Müller-Zählrohr (Auslösezählrohr)

Beim Durchgang radioaktiver Strahlung durch Materie werden durch inelastische Stöße Elektronen aus den Atomverbänden herausgeschlagen und die Atome ionisiert. Geschieht dies durch Anlegen einer Spannung innerhalb eines elektrischen Feldes, so werden sich die entstandenen freien Ladungsträger (Elektronen, Ionen) bewegen und einen Strom verursachen, der nachgewiesen werden kann.

Zählrohre sind gasgefüllte Elektrodensysteme mit koaxialer Elektrodenanordnung. Als Zählgase finden meist Edelgase Verwendung (Ne, Ar, He). Beim *Geiger-Müller-Zählrohr* (GM-Zählrohr; *Hans Geiger*, 1882-1945; dt. Physiker; *Ernst-Wilhelm Müller*, *1911; dt. Physiker; 1951 Prof. an der FU Berlin) ist die angelegte Spannung so groß (typisch 500 V), dass die durch die Strahlung gebildeten primären Ladungsträger (*Primärionisation*) in dem elektrischen Feld sehr stark beschleunigt werden und weitere Atome des Zählgases ionisieren (*Sekundärionisation*). Es entstehen *Ladungslawinen*, deren Größe unabhängig von der Primärionisation, und damit allerdings auch unabhängig von der Energie des eingefallenen Strahlungsquants ist. Durch zusätzliche *Löschgase* wird erreicht, dass der Ionisationsprozess

wieder abbricht und zu keiner dauernd brennenden Gasentladung führt.

Der durch ein *Ereignis* ausgelöste, kurzzeitige Strom im Zählrohrkreis verursacht an einem Außenwiderstand R einen kurzzeitigen Spannungsabfall (Impuls), der über einen Kondensator ausgekoppelt wird. Die Impulse des GM-Zählrohrs sind wegen der hohen Gasverstärkung so groß, dass sie ohne weitere Nachverstärkung direkt einem Zählgerät zugeführt werden können.

Bei gleichbleibender Strahlungsintensität ist die Zählrate von der angelegten Spannung abhängig (Zählrohrcharakteristik). Die *Einsatzspannung* ist der untere, kritische Spannungsgrenzwert für die Lawinenbildung. Es schließt sich ein Bereich an, in dem die Zählrate nur wenig von der Spannung abhängt (*Zählrohrplateau*) und innerhalb dessen ein *Arbeitspunkt* für den Zählrohrbetrieb gewählt wird. Ein leichter Anstieg der Zählrate innerhalb dieses Plateaus wird durch eine Vergrößerung des effektiven Nachweisvolumens und durch eine mit der Spannung steigende Zahl von Fehl- und Nachentladungen verursacht. Mit noch größerer Spannung wird schließlich eine Dauerentladung ausgelöst.

Nach dem Nachweis eines Ereignisses kommt es kurzzeitig zu einer Abnahme der Feldstärke im Zählrohr durch die Abschirmung des negativen Potentials der Zählrohrwand, durch die nur langsam abwandernde Raumladungswolke der positiven Ionen und zusätzlich durch den Spannungsabfall am Außenwiderstand. Während dieser *Totzeit* kann kein weiteres Strahlungsquant im Zählrohr nachgewiesen werden.

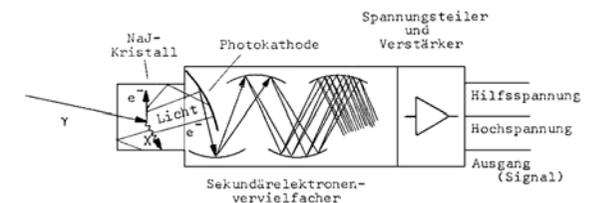
Der Vorteil des GM-Zählrohrs liegt im einfachen Aufbau und den großen Ausgangsimpulsen durch die hohe Gasverstärkung. Die Nachteile sind ein fehlendes *Energieauflösungsvermögen* und die Begrenzung auf kleine Zählraten wegen der vergleichsweise großen Totzeit.

Natrium-Jodid-Szintillationsdetektor

Natrium-Jodid-Szintillationsdetektoren (NaJ-Detektoren) dienen dem Nachweis von γ -Strahlung und beruhen auf dem (inneren) Photoeffekt. In einem NaJ-Kristall wird das γ -Quant durch Photoeffekt gestoppt und die gesamte Quantenenergie auf ein Elektron übertragen (Primärelektron). Das Elektron wird freigesetzt und verursacht zusammen mit dem nachfolgenden Röntgenquant eine Kaskade weiterer elektronischer Anregungsprozesse,

an deren Ende durch deren spontanen Zerfall eine bestimmte Lichtmenge entsteht, die der primären - Energie äquivalent ist.

Der NaJ-Kristall wird in optischen Kontakt mit einem *Sekundärelektronenvervielfacher* gebracht (SEV; engl. Photomultiplier). An der Photokathode des SEV werden durch das Licht Elektronen im Vakuum ausgelöst, die elektrostatisch beschleunigt und an weiteren sogenannten *Dynoden* vervielfacht werden. Die dadurch entstehende Ladungsmenge wird schließlich elektronisch weiter verstärkt. Zum Prinzipaufbau eines NaJ-Detektors siehe folgende Abbildung.



Der gesamte Prozess ist linear, so dass am Ausgang des Systems ein Impuls erscheint, dessen Höhe der Energie des einfallenden γ -Quants proportional ist und eine *Linie* verursacht (*Photolinie*; *Photopeak*).

Neben dem Photoeffekt finden im Kristall auch Compton-Prozesse statt, bei denen das γ -Quant inelastisch gestreut wird. Für den Fall, dass das gestreute Quant den Kristall wieder verlässt, wird nur ein Teil der Energie auf das System übertragen und nachgewiesen. Wegen der Abhängigkeit von den mit statistischer Verteilung auftretenden Streuwinkeln erscheint dadurch ein zusätzliches *Compton-Plateau* im Spektrum, das bei der maximalen Übertragungsenergie bei einem Streuwinkel von 180° abbricht (*Compton-Kante*).

Umgekehrt finden Compton-Streuprozesse auch in der übrigen Materie des Detektors außerhalb des Kristalls statt, wobei aufgrund der geometrischen Verhältnisse hauptsächlich zurück gestreute γ -Quanten im Bereich der maximalen Übertragungsenergie in den Nachweis-kristall eintreten und dort eine breite, sogenannten *Rückstreulinie* verursachen (Backscatter-peak). Diese Linie ist in den Spektren hier im Praktikum deutlich zu beobachten.

Die Nachweis-Impulse eines NaJ-Detektors sind im wesentlichen durch die statistischen Prozesse im SEV vergleichsweise stark verbreitert. Für das Auflösungsvermögen von Kernstrahlungsmessgeräten ist es üblich, als Linienbreite die volle Breite bei halben Maximum zu berücksichtigen (engl. *FWHM* = Full Width at Half Maximum) und gegenüber der Begriffsbildung in der Optik den Kehrwert des Breite-Lage-Verhältnisses anzugeben:

$$(1) \quad \text{Auflösungsvermögen} = \frac{\text{FWHM}}{\text{Linienlage}}$$

Das Auflösungsvermögen von NaJ-Detektoren bewegt sich im Bereich einiger Prozent (5-10 %)

Auslösezähler

Einfache Detektoren ohne Energieauflösungsvermögen können eingesetzt werden, wenn es ausreichend ist, das integrale Spektrum zu registrieren, wobei die Weiterverarbeitung der Impulse digital durch Zähler (siehe Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*) oder durch analoge Integration mit einer geeigneten Zeitkonstanten erfolgt. Dabei wird die Pulsfolge in eine der mittleren Pulsrate proportionale Spannung umgesetzt, die mit einem Voltmeter angezeigt oder mit einem Schreiber aufgezeichnet werden kann (Beispiel: Ionendosisleistungsmessgerät am Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*).

Spektrometer

Energieauflösende Systeme mit Proportionalzählrohren, Szintillationsdetektoren oder Halbleiterdetektoren als Detektoren bezeichnet man als *Spektrometer*. Sie liefern für jedes im Detektor absorbierte Strahlungsquant (α -, β -Teilchen, Röntgen- oder Gamma-Quant) einen elektrischen Impuls, dessen Höhe zu der im Detektor absorbierten Energie proportional ist. Die Breite und Form der Impulse (typisch 1 μs bzw. einige Volt) wird durch die *Zeitkonstanten*-Bauglieder in den Verstärkerstufen des Systems bestimmt. Bestimmte Wechselwirkungsprozesse (z.B. der innere Photoeffekt) absorbieren die gesamte Quantenenergie, so dass die Impulshöhe direkt der Energie der Strahlung entspricht (Photolinie). Die Linien (Peaks) eines Spektrums sind dabei an der Häufung von Pulsen gleicher Amplitude zu erken-

nen. Andere Prozesse (z.B. der Compton-Effekt) absorbieren nur einen Teil der Quantenenergie und liefern kleinere Impulse einer bestimmten Verteilung, die einen zusätzlichen kontinuierlichen *Untergrund* im Spektrum verursachen. Es wird empfohlen, sich am Versuch *GAMMA-SPEKTROSKOPIE* die Impulse des Szintillationsdetektors auf dem Oszilloskop bei langsamer und bei schneller Zeitablenkung anzusehen.

Die Weiterverarbeitung der Impulse, in deren Impulshöhe die Information über die Energie liegt, kann nach unterschiedlichen technischen Methoden erfolgen.

Einkanalanalysator

Besteht die Aufgabe z.B. darin, die Zeitabhängigkeit eines bestimmten Übergangs, d.h. einer bestimmten Linie zu messen, so kann dies einfach durch einen *Einkanalanalysator* erfolgen (EKA; engl. SCA von Single-Channel-Analyzer). Ein EKA besitzt zwei einstellbare Spannungswerte (*Schwellen*) und gibt genau dann einen logischen Ausgangsimpuls ab (Rechteckimpuls fester Höhe und Länge), wenn die Impulshöhe am Eingang in das *Fenster* zwischen den beiden Schwellwerten fällt. Die Ausgangsimpulse können dann gezählt oder anders weiterverarbeitet werden. Ein Nachteil des EKA liegt darin, dass damit nur eine Linie beobachtet werden kann, und dass das Fenster den kontinuierlichen Untergrund mit erfasst. Die Aufnahme eines (differenziellen) Gesamtspektrums ist nur umständlich und zeitraubend vermittels Durchstimmen des EKA möglich (*Boxcar*-Prinzip).

Vielkanalanalysator

Einfacher und eleganter lässt sich die Aufgabe durch Verwendung eines *Vielkanalanalysators* lösen (VKA; engl. MCA von Multichannel-Analyzer). Ein VKA besteht aus einem *Analog-Digital-Wandler* (AD-Wandler; engl. ADC von Analog-Digital-Converter) und einer Vielzahl von nachgeschalteten Zählstellen (typisch 256 bis 4096 und mehr). Der ADC wandelt die Höhe eines am Eingang eintreffenden Impulses in eine Zahl um. In einem gängigen Verfahren wird durch den Impuls über eine Diode zunächst ein Kondensator aufgeladen und so die Peakhöhe fest gehalten. Danach wird der Kondensator bei konstantem Strom entladen, und die Zeit bis zur vollständigen Entladung durch Zählen von Uhrimpulsen bestimmt (typisch 100 Mhz), so dass die An-

zahl dieser Impulse der Peakhöhe und damit der absorbierten Strahlungsenergie entspricht. Diese Zahl wird als Adresse eines Zählers (Kanal) interpretiert, und dessen Inhalt um eins erhöht. Die Zählerinhalte liefern so die Verteilungsfunktion der Strahlungsintensität über der Energie, die z.B. auf einem Bildschirm dargestellt oder zur weiteren Auswertung auch numerisch ausgegeben werden kann. Weitere Bausteine eines VKA sind ein Rechenwerk zur Ablauf- und Zeitsteuerung und ein Digital-Analog-Wandler (DA-Wandler bzw. DAC) zur Umsetzung von Kanaladressen und -inhalten in analoge Spannungen zur Darstellung auf dem Bildschirm (oder einem Schreiber). Ein DAC steuert durch die Bits der digital kodierten Zahl elektronische Schalter und summiert Einzelströme zu einem Gesamtstrom, der dann an einem Widerstand eine der Zahl proportionale Spannung erzeugt.

Messungen und Auswertungen von Spektren werden durch einen VKA erheblich erleichtert. Intensitäten von Linien können durch numerische Integration der Peaks bestimmt werden, wobei Untergrundanteile aus dem Verlauf der Spektren außerhalb der Linien ermittelt werden können. Im Allgemeinen muss bei den Auswertungen zusätzlich die Nachweispfindlichkeit des Detektors berücksichtigt werden, die stark von der Energie der einfallenden Strahlung abhängig sein kann.

Der Einsatz von Vielkanalanalysatoren beschränkt sich nicht auf die Kernspektroskopie; sie werden in der modernen Messtechnik für viele Aufgaben verwendet. Einige Beispiele: Mit einem *TPHC* (Time-to-Pulse-Height-Converter) können Pulse erzeugt werden, deren Höhe proportional zum zeitlichen Abstand zwischen einem Start- und einem Stoppimpuls ist. Die Weiterverarbeitung in einem VKA liefert dann z.B. die Lebensdauer eines Zwischenzustands in einer Gamma-Kaskade (Start und Stopp: EKA auf den entsprechenden Peaks) oder eines angeregten Atomzustands (Start: Anregungs-Laserpuls, Stop: vom Atom emittierte Strahlung). Bei der *Sampling-Technik* werden mit einem schnellen Schalter Impulse aus einer kontinuierlich veränderlichen Spannung *herausgeschnitten*; der VKA liefert dann das zugehörige Amplitudenspektrum. Ebenso wichtig sind Anwendungen, bei denen der VKA nicht im bisher betrachteten PHA-Modus (Pulse-Height-Analysis), sondern im *MCS-Modus* (Modus betrieben wird (Multi-Channel-Scaling). Dabei werden eintreffende (Einheits-) Pulse für eine bestimmte Zeit in die einzel-

nen Kanäle gezählt, und damit die Abhängigkeit der Impulsrate von der Zeit oder von einer zeitlich modulierten Größe registriert. Breite Anwendung findet dies beim *Signal-Averaging-Verfahren*, wo zur Verringerung statistischer Fehler viele Messzyklen addiert werden. Als Beispiel seien *Sampling-Oszilloskope* erwähnt, bei denen die Sampling-Technik mit einem VKA in MCS Betrieb kombiniert wird. Die Echtzeit-Darstellung hochfrequenter Signale mit Oszilloskopen wird ab 50 MHz teuer und stößt bei 1000 MHz an technische Grenzen. Da es aber möglich ist, wesentlich schnellere Trigger- und Sampling-Schaltungen zu bauen, kann der Momentanwert eines periodisch wiederkehrenden Signals nacheinander für verschiedene Verzögerungen gegen einen Triggerzeitpunkt gespeichert werden. Die Darstellung der Kurvenform kann dann auf einem "langsamen" Oszilloskop erfolgen.

ANLAGE V STRALENSCHUTZANWEISUNG und DOSIMETRIE	GPI
---	------------

Hinweise auf Gefährdungen durch ionisierende und radioaktive Strahlungen und mögliche Strahlenschutzmaßnahmen und Grundlagen der Dosimetrie.

Strahlenschutzanweisung

Von ionisierenden und radioaktiven Strahlen können große Gefahren für Gesundheit und Leben des Menschen ausgehen. Der Schutz vor derartigen Strahlungen ist in der *Strahlenschutzverordnung (StrSchV)* gesetzlich geregelt, die dem Schutz von Personen, Einrichtungen und der Umwelt dient. Eine formale Einhaltung von Strahlenschutzmaßnahmen ist deshalb besonders wichtig, weil der Mensch keine Sinnesorgane zur Wahrnehmung dieser Strahlungen besitzt.

Strahlenwirkungen

Die wichtigsten Strahlungstypen sind α -, β -, γ -, Röntgen- (X-) und Neutronenstrahlen, die sich in ihren charakteristischen Eigenschaften, und damit hinsichtlich der Strahlenwirkungen und des Strahlenschutzes, stark unterscheiden.

α - und β -Teilchen unterliegen beim Durchgang durch Materie elektrostatischen Wechselwirkungskräften mit der Elektronenhülle und dem Atomkern. Sie werden dadurch stark abgebremst und ionisieren das Bremsmaterial. Neutronen sind ungeladen. Sie können sich relativ frei in Materie bewegen, bis sie schließlich durch einen Einfangprozess gebunden werden. Neutronen sind daher schwer abzubremsen und ionisieren auch nicht. Röntgen- und γ -Strahlen sind elektromagnetische Wellen sehr kurzer Wellenlänge bzw. großer Frequenz und hoher Quantenenergie. Sie haben eine sehr große Reichweite und ionisieren ebenfalls.

Die gesundheitsschädigenden Wirkungen der Strahlungen liegen in Zerstörungen im Bereich der chemischen Beschaffenheit und damit der mikroskopischen Struktur organischer Substanzen (Atome, Moleküle, Zellen) und deren Folgen für den Organismus. Man unterscheidet *somatische Schädigungen* (Körperschäden) und *genetische Schädigungen*. Somatische Schädigungen können direkte Folgen tragen, wie Zerstörung von Zellen und Gewebe bis hin zu verbrennungsartigen Erschei-

nungen, oder auch indirekte Folgen, wie die Erzeugung krankhaft veränderter Zellen, die später Ursache von Krankheiten sein können (Krebs).

Von der Art der Einwirkung unterscheidet man zwischen äußerer Strahlenbelastung durch Exposition (Bestrahlung) oder Kontamination (äußere Verunreinigung) und innerer Strahlenbelastung durch Inkorporation (Inhalation, Einnahme über den Magen-Darm-Trakt oder andere Verabreichungsformen im Umfeld medizinischer Diagnose oder Therapie).

Allgemeine Strahlenschutzgrundsätze

Wegen der großen Gefahren muss mit strahlungserzeugenden Einrichtungen und radioaktiven Stoffen besonders sorgfältig umgegangen werden. Die wichtigsten Grundsätze des Strahlenschutzes sind (28 StrSchV):

- jede unnötige Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt zu vermeiden, und
- jede Strahlenexposition oder Kontamination von Personen, Sachgütern oder der Umwelt unter Beachtung des Standes von Wissenschaft und Technik unter Berücksichtigung aller Umstände des Einzelfalles auch unterhalb der in der Strahlenschutzverordnung festgesetzten Grenzwerte so gering wie möglich zu halten.

Die Hauptschutzmaßnahme gegen eine äußere Bestrahlung sind eine möglichst gute Abschirmung, ein möglichst großer Abstand von der Strahlungsquelle und eine möglichst kurze Aufenthaltsdauer im Bereich der Strahlung (die drei großen **A** des Strahlenschutzes).

α -Strahlung wird wegen der Größe und Ladung der Partikel stark abgebremst und hat eine sehr geringe Reichweite (typisch 40 mm in Luft und 0,03 mm in Aluminium). Die gesamte Energie der Strahlung wird damit jedoch auf einer sehr kurzen Bremsstrecke abgegeben und führt dort unter Umständen zu starken Schädigungen. α -Strahler sind aus diesen Gründen relativ ungefährlich bei äußerer Einwirkung, da die Strahlung in den oberen, nicht vitalen Hornhautschichten abgebremst wird. Sie ist andererseits sehr gefährlich bei Inkorporation, da den inneren Organen entsprechende schützende Schichten fehlen.

β -Strahlung hat ein vergleichbares Verhalten, jedoch mit deutlich größerer Reichweite (typisch 2 m in Luft

und 1 mm in Aluminium). Auch bei äußerer Einwirkung sind Strahlenschutzmaßnahmen erforderlich, wobei insbesondere die Augen eines besonderen Schutzes bedürfen, da die Augenlinse unter Einwirkung starker β -Strahlung getrübt wird. Jedoch lässt sich die Strahlung noch relativ einfach durch einige Millimeter Plexiglas oder Aluminium abschirmen.

Röntgen- und γ -Strahlen haben dagegen ein großes Durchdringungsvermögen und lassen sich nur schwer abschirmen. Zudem ist keine vollständige Absorption möglich, sondern lediglich eine exponentielle Schwächung entsprechend der Absorberdicke. Zum Abschirmen eignen sich am besten spezifisch schwere Substanzen wie Blei oder Uran. Die Halbwertsdicke von Blei (Schwächung um 50 %) beträgt für die 1,2-MeV-Strahlung von Co-60 etwa 15 mm.

Neutronen sind besonders gefährlich. Als ungeladene Teilchen erfahren sie keine elektrischen Wechselwirkungskräfte und können Materie leicht durchdringen. Wegen der gleichen Masse ersetzen sie leicht Wasserstoffkerne durch Stoß und zerstören damit das Wasserstoffatom. Da Wasserstoff ein zentraler Baustein organischer Verbindungen ist, entstehen daraus folgenschwere Veränderungen des labilen, chemischen Gleichgewichts physiologischer Systeme. Schwerere Atomkerne haben große Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfangreaktionen, wobei es zu Kernreaktionen kommt, die ebenfalls stark schädigende Veränderungen der molekularen und chemischen Struktur zur Folge haben. Neutronen lassen sich nur schwer abschirmen; am besten noch mit gleich schweren Stoßpartnern, wie Protonen als Wasserstoffkerne in wasserstoffhaltigen Materialien wie Wasser oder Paraffin.

Dosimetrie

Aktivität

Bei der Betrachtung von Strahlengefährdungen muss zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden. Ursache ist ein Strahlungsfeld, das bei radioaktiven Zerfallsprozessen als *Aktivität* mit der Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit definiert ist:

$$(1) \quad \text{Aktivität} A = \frac{\text{Zahl der Zerfälle}}{\text{Zeit}}$$

Die Einheit der Aktivität ist damit:

$$(2) \quad [A] = 1 \frac{\text{Zerfall}}{\text{s}} = 1 \text{Bq (Bequerel)}$$

Energiedosis

Bringt man eine Probe, z.B. einen organischen Körper, in ein radioaktives Strahlungsfeld, so wird ein Teil der Strahlung absorbiert und verursacht physikalische oder physiologische Wirkungen. Ein anderer Teil dagegen durchläuft den Körper ohne Wechselwirkungen und damit ohne Strahlenschädigungen. Ein Maß für die Strahlenbelastung einer Probe bzw. eines Körpers ist die pro Masseneinheit absorbierte Strahlungsenergie. Diese Größe wird als *Energiedosis* D_E bezeichnet:

$$(3) \quad D_E = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse Probekörper}}$$

Der Anteil der absorbierten Strahlungsenergie, d.h. die Dosiswerte, hängt von der Strahlenart und der Strahlungsenergie ab und bezieht sich damit immer auf einen bestimmten Stoff als Probensubstanz. Die Einheit der Energiedosis ist:

$$(4) \quad [D_E] = \frac{1 \text{Joule}}{\text{kg}} = 1 \text{Gy (Gray)}$$

(Eine ältere Einheit ist $1 \text{ rad} = 0,01 \text{ Gy}$). Die pro Zeiteinheit empfangene Dosis heißt *Dosisleistung*.

Ionendosis

Die Energiedosis ist schwer messbar, da die relevanten Energiemengen sehr gering sind (eine letale Strahlendosis würde die Körpertemperatur des Menschen um etwa 2 mK erhöhen und entspräche der Wärmemenge eines Schluckes Kaffee). Als praktische Messgröße wurde deshalb die *Ionendosis* D_Q eingeführt, die die durch Ionisation der Strahlung in Luft erzeugte Ladungsmenge angibt:

$$(5) \quad D_Q = \frac{\text{durch Ionisation erzeugte Ladung}}{\text{Masse Luft}}$$

Die Einheit der Ionendosis ist damit:

$$(6) \quad [D_Q] = 1 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Eine ältere Einheit für D_Q ist $1 \text{ R (Röntgen)} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$.

Die Ionendosis kann direkt mit Hilfe von *Ionisationskammern* gemessen werden. Die Einheit der Ionendosisleistung ist $1 \text{ C/(kg} \cdot \text{s)} = 1 \text{ A/kg}$.

Der Zusammenhang zwischen Energiedosis und Ionendosis hängt generell von der Quantenenergie der Strahlung und vom Probenmaterial ab. Für Muskel- und Weichteilgewebe gilt jedoch in guter Näherung unabhängig von der Quantenenergie:

$$(7) \quad D_E = 40 \frac{\text{Gy}}{\text{C/kg}} D_Q$$

Äquivalentdosis

Die biologischen Strahlenwirkungen und Strahlenschädigungen werden neben der Quantenenergie noch von der Strahlenart bestimmt, was durch einen zusätzlichen, dimensionslosen Faktor für die *relative biologische Wirksamkeit (RBW-Faktor)* ausgedrückt wird:

Strahlentyp	RBW-Faktor
γ -, β -Strahlung	1
langsame Neutronen	5
α -Strahlen, schnelle Neutronen	10

Das Produkt aus Energiedosis und *RBW-Faktor* ergibt die wirkungsrelevante *Äquivalentdosis* $D_{\bar{A}}$. Weil der RBW-Faktor dimensionslos ist, stimmen die Einheiten der beiden Größen überein, und zur Unterscheidung erhält die Einheit 1 J/kg für den Fall der Äquivalentdosis den Einheitenamen *Sievert*.

$$(8) \quad D_{\bar{A}} = \text{RBW} D_E \quad \text{und}$$

$$(9) \quad [D_{\bar{A}}] = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 1 \text{Sv (Sievert)}$$

Eine ältere Einheit der Äquivalentdosis ist $1 \text{ rem} = 0,01 \text{ Sv}$.

Typische Strahlenbelastungen

Es gibt eine *natürliche Strahlenbelastung* aus terrestrischer Strahlung (Strahlung aus natürlichen, radioaktiven Materialien der Erdkruste) und kosmischer Strahlung (Höhenstrahlung). Sie beträgt für die Bundesrepublik Deutschland im Mittel 1,1 mSv pro Jahr. (Der Anteil von *Fallout* aus Kernwaffendetonationen ist derzeit auf weniger als 1 % der natürlichen Strahlung zurückgegangen). In bestimmten Regionen des Schwarz-

walds liegt die natürliche Belastung bei etwa 2,7 mSv, und es gibt Gebiete auf der Erde, wo die natürliche Belastung aufgrund starker terrestrischer Strahlung mehr als 20 mSv pro Jahr beträgt. Es gibt umfangreiche Untersuchungen über die Strahlenwirkung auf die dort lebende Bevölkerung, wobei jedoch signifikante Auswirkungen nicht belegt werden konnten.

Die nach der gesetzlichen *Strahlenschutzverordnung* zugelassene Erhöhung der Belastung der allgemeinen Bevölkerung durch Strahlung erzeugende Einrichtungen (Röntgenanlagen, Reaktoren, Beschleuniger etc.) darf höchstens 0,3 mSv pro Jahr betragen.

Typische Strahlenbelastungen in der Röntgendiagnose sind ca. 1 mSv für eine einfache Röntgenaufnahme (Thorax) bis etwa 100 mSv für multiple Röntgen-Kontrastaufnahmen. Typische Teilkörper-Herdbelastungen bei der Strahlentherapie (Krebsbehandlung) gehen bis zu einigen zig-tausend Sv. Der gesetzliche Grenzwert für beruflich strahlenexponierte Personen beträgt 50 mSv pro Jahr für Ganzkörperbestrahlungen. Die letale Dosis (100 % Letalität) liegt bei etwa 8 Sv Ganzkörperbelastung.

An den Versuchsplätzen, an denen mit radioaktiver Strahlung umgegangen wird, sind Dosisleistungsmessgeräte zur Kontrolle der natürlichen Strahlung und der zusätzlichen Belastung durch die radioaktiven Quellen vorhanden.

ANLAGE VI
STATISTIK

GPI

Statistische Schwankungen

Physikalische Vorgänge verlaufen aufgrund der quantelten Natur der Systeme stochastisch. Deterministisch werden Vorgänge in Strenge für den Grenzfall unendlich vieler oder praktisch bei einer großen Anzahl elementarer Beiträge; so dass die zu erwartenden Schwankungen gegen Null gehen. Dies ist die Situation der *makroskopischen* Physik, deren Aussagen sich z.B. auf "unendlich" viele Teilchen eines Gasvolumens oder auf "unendlich" viele schwingenden Ladungen einer strahlenden Antenne beziehen.

Für die Wertausrägungen von Systemen, die durch endlich viele oder eine vergleichsweise kleine Anzahl atomarer Systeme bestimmt wird, gib es keine streng deterministische Vorhersage; und die Ergebnisse zeigen (statistische) Schwankungen mit einer Verteilung der Werte.

Ist analog nicht die Zahl der mitwirkenden mikroskopischen Systeme, sondern die Zahl der Beobachtungen unendlich, so gibt es wieder eine strenge Vorhersage, jedoch nur für die *Parameter* der Verteilung, wie z.B. den Mittelwert oder die Standardabweichung (Schwankungsbreite).

Zusätzlich treten die Schwankungen experimentell nur in Erscheinung, wenn sie aus der Empfindlichkeit der Messapparatur herausragen. Eine reale Messreihe liefert dann eine Näherung der erwarteten Verteilungsfunktion.

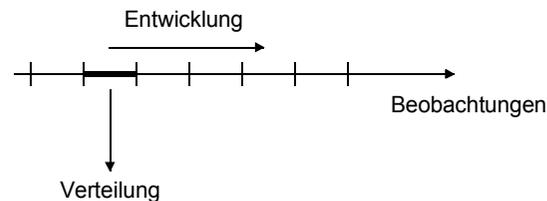
Klassische Beispiele auch aus dem Bereich des Grundpraktikums sind die Zerfälle angeregter atomarer oder Kernzustände, der radioaktive Zerfall oder die stochastische Wechselwirkung eines Teilchen- oder Strahlungsstroms mit Materie.

Typisch ist dabei die Betrachtung einer *begrenzten Beobachtung*, d.h. einer begrenzten Beobachtungszeit oder einer begrenzten Wechselwirkungsstrecke, für den dann der stochastische Prozess durch zeit- oder län-genbezogene Wahrscheinlichkeiten beschrieben wer-

den kann (Übergangswahrscheinlichkeit, Stoßwahrscheinlichkeit).

Mathematisch-statistisch stellt dies ein *Bernoulli-Experiment* mit zweiwertigem Ausgang dar: *Zerfall/Stoß* oder *nicht*, *JA* oder *NEIN*, *0* oder *1*, *SCHWARZ* oder *WEISS*, *ADLER* oder *ZAHL*. In diesem Skript sollen Verteilungsfunktionen entwickelt werden, die sich im Zusammenhang mit derartigen *Bernoulli-Experimenten* ergeben.

Dabei gibt es zwei Fragestellungen. Einmal die Frage nach der Verteilung der Ergebnisse innerhalb einer solchen Beobachtung. Zum anderen die Entwicklung eines endlichen Ensembles aufgrund solcher Prozesse.

Exponentialentwicklung

Zunächst soll eine zeitliche Entwicklung am Beispiel des radioaktiven Zerfalls betrachtet werden (Versuch *RADIOAKTIVER ZERFALL*). Wenn die zeitbezogene Zerfallswahrscheinlichkeit (Übergangswahrscheinlichkeit) eines Kerns λ ist, so ergibt sich als mittlere Zahl der Zerfälle eines Ensembles von n radioaktiven Kernen in einem Beobachtungszeitraum Δt :

$$(1) \quad \bar{n} = p n = \lambda \Delta t n$$

Hinsichtlich einer endlichen Menge von Kernen stellt \bar{n} eine Abnahme dar. Näherungsweise soll die Menge als groß betrachtet, und n als kontinuierliche Variable aufgefasst werden. Dann ergibt sich aus (1) eine Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung des Ensembles:

$$(2) \quad dn = -\lambda n dt$$

mit der Lösung

$$(3) \quad n = n_0 e^{-\lambda t}$$

Dies ist das Zeitgesetz des radioaktiven Zerfalls, wobei man ein genau entsprechendes Ergebnis für den Fall

eines Absorptionsgesetzes von Strahlung durch Materie erhält, wenn man modellmäßig stochastisch verteilte

Strahlungsquanten und Stoßpartner und "singuläre" Stoßprozesse annimmt, bei denen ein Strahlungsquant endgültig aus dem Strahlungsstrom entfernt wird.

Binomialverteilung

Während im vorgehenden Fall die Anzahl der Ereignisse bei einer Beobachtung "integral" durch den Mittelwert beschrieben wurde, soll jetzt "differentiell" nach der Verteilung dieser Anzahl gefragt werden. Zur Verallgemeinerung wird die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Beobachtungszeitraum $\lambda \Delta t$ als p geschrieben, so dass die Wahrscheinlichkeit des Komplementäreignisses $(1-p)$ ist. Bei N "Durchführungen" des Einzelexperiments (bei N Kernen) folgt aus dem Multiplikationsgesetz für statistisch unabhängige Ereignisse als Wahrscheinlichkeit, dass in n bestimmten Fällen das Ereignis (der Zerfall) eintreten, und in den übrigen $(N-n)$ Fällen nicht:

$$(4) \quad p^n (1-p)^{N-n}$$

Jedoch interessiert im Allgemeinen nicht, in welchen bestimmten Fällen das Ergebnis eintritt, sondern nur deren Gesamtzahl. Der Wert (4) ist dann mit der Zahl der Möglichkeiten zu multiplizieren, aus den N Experimenten n auszuwählen, in denen das Ereignis eintritt. Diese Zahl ist durch einen Binomialkoeffizient gegeben:

$$(5) \quad \binom{N}{n} = \frac{N!}{n! (N-n)!}$$

Als gesuchte Verteilung erhält man die *Binomialverteilung*:

$$(6) \quad B(n) = \frac{N!}{n! (N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Die diskrete *Zufallsvariable* n beschreibt die tatsächlich möglichen Ergebnisse, und die Verteilung (6) direkt deren Wahrscheinlichkeitswerte (z.B. für die Anzahlen von Kernzerfällen in einem Beobachtungsintervall).

Die Binomialverteilung entspricht dem *Normierungssaxiom* für Wahrscheinlichkeiten. Die Summation über alle möglichen Ereignisse, d.h. über alle n , stellt gerade die binomische Potenz mit p und $(1-p)$ als Nomen dar:

(7)

$$\sum_{n=0}^N B(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = [p + (1-p)]^N = 1^N = 1$$

Verteilungsparameter

Die Werte eines Verteilungsmodells, oder die Daten einer beobachteten oder erhobenen Verteilung, stellen die umfassende, aber umfangreiche und damit unbequeme Information einer Verteilung dar. Es sind daher *statistische Maßzahlen* für Verteilungen definiert, mit denen die wichtigen Eigenschaften quantitativ repräsentiert werden können.

(8)	Diskrete Verteilung $F(x_i)$	Verteilungsfunktion $\rho(x)$
Lage- maß	Mittelwert $\bar{x} = \sum x_i F(x_i)$	Erwartungswert $\mu = \int x \rho(x) dx$
Streu- maß	Mittlere quadratische Abweichung $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 F(x_i)$	Varianz $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 \rho(x) dx$

Die Bildung der quadratischen Abweichungen als Streumaß berücksichtigt die unterschiedlichen Vorzeichen der Abweichungen (die mittlere Abweichung selbst würde bei einer symmetrischen Verteilung verschwinden). Die *Standardabweichung* ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung bzw. der Varianz, die damit in die Ursprungsdimension der Verteilungsvariablen zurückkehrt.

Die Berechnung von Mittelwert und Varianz der Binomialverteilung ist auf direktem Weg algebraisch aufwendig, aber einfach unter Anwendung der (plausiblen) Summenregeln für die Maßzahlen:

(9)

$$\overline{(x_i + y_i)} = \bar{x}_i + \bar{y}_i \quad \text{und} \quad s^2(x_i + y_i) = s^2(x_i) + s^2(y_i)$$

Die zweiwertige *Bernoulli-Verteilung* als Grenzfall der Binomialverteilung mit $n = 1$ hat die Werte $n = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ und $n = 1$ mit der Wahrschein-

lichkeit p . Als Mittelwert und Varianz folgen damit nach den Definitionen (8):

$$\bar{n} = 0(1-p) + 1p = p \quad \text{und}$$

$$s^2 = (0-p)^2(1-p) + (1-p)^2 p = (1-p)p$$

Und daraus mit (9) sofort für die Binomialverteilung mit N Ereignissen:

Poisson-Verteilung

Die *Bernoulli-Verteilung* ist praktisch unhandlich wegen der Binomialkoeffizienten, die schnell sehr große Werte annehmen. Für "seltene" Ereignisse mit kleinen Mittelwerten und kleiner Wahrscheinlichkeit, die häufig vorliegen, und für Werte in der Umgebung des Mittelwerts lässt sich eine bequemere Näherungsverteilung entwickeln. Die Annahmen bedeuten:

$$(11) \quad \bar{n}, n \ll N \quad \text{und} \quad p \ll 1$$

Aus dem Binomialkoeffizienten wird $(N-n)!$ herausgekürzt und die verbleibenden Faktoren im Zähler von $(N-n+1)$ bis N näherungsweise gleich N gesetzt:

$$(12) \quad \frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n \quad \text{und} \quad N^n p^n = \bar{n}^n$$

Die Potenz $(1-p)^{N-n}$ wird als Exponentialterm geschrieben, und der benötigte Logarithmus in der Umgebung von 1 linear genähert:

$$(13) \quad (1-p)^{N-n} = e^{\ln(1-p)^{N-n}} = e^{(N-n)\ln(1-p)} \approx e^{-pN} = e^{-\bar{n}}$$

wegen

$$(14) \quad \ln(1-p) \approx -p.$$

Die Bernoulli-Verteilung geht damit in die *Poisson-Verteilung* über, die nur noch durch den einen Parameter \bar{n} bestimmt wird:

$$(15) \quad P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$$

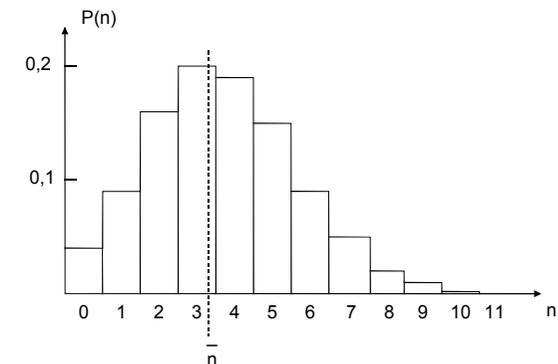
Auch die *Poisson-Verteilung* ist normiert:

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1 \quad \text{wegen} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{\bar{n}}$$

Dabei wird der Gültigkeitsbereich von (15) abweichend von der Ausgangseinschränkung für $n \rightarrow \infty$ angenommen, was wegen des starken Abfalls der Funktion $P(n)$ zu großen Werten hin berechtigt ist. Für den Mittelwert berechnet sich analog zu (9):

$$(17) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \bar{n}$$

Die folgende Abbildung zeigt eine Poisson-Verteilung für $\bar{n} = 3,8$.



Die *Poisson-Verteilung* ist unsymmetrisch. Mit wachsendem \bar{n} geht sie aber in eine Verteilung über, die in der Umgebung von \bar{n} symmetrisch zu diesem Wert wird.

Gauß-Verteilung

Die *Bernoulli-* und die *Poisson-Verteilung* sind diskrete Verteilungen, wobei es in vielen Fällen praktisch vorteilhaft ist, mit einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion arbeiten zu können.

Zur Entwicklung einer Funktion aus der *Poisson-Verteilung* soll die Forderung (11) dadurch ergänzt werden, dass der Mittelwert zwar klein gegen N , aber dennoch groß gegen 1 sein soll:

$$(18) \quad \bar{n} \gg 1$$

und die Überlegungen auf eine Umgebung von \bar{n} beschränkt werden, so dass:

$$(19) \quad |n - \bar{n}| \ll \bar{n}$$

Der Übergang zu einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion geschieht durch Aufstellung eines Differenzenquotienten für die diskrete Poisson-Verteilung, die mit den Näherungsannahmen als Differentialgleichung aufgefasst werden kann:

$$(20) \quad \frac{P(n) - P(n-1)}{\Delta n = 1} = P(n) - P(n-1) = -\frac{n - \bar{n}}{\bar{n}} P(n)$$

Der rechte Ausdruck in (20) stellt wegen der Voraussetzung (18) eine mit n nur langsam variierende Größe dar, so dass n dann als kontinuierliche Variable aufgefasst (und deshalb jetzt mit x bezeichnet wird), und (20) als Differentialgleichung einer Verteilungsfunktion $G(x)$ interpretiert werden kann:

$$(21) \quad \frac{dG(x)}{dx} = -\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}} G(x)$$

Sie hat die Lösung:

$$(22) \quad G(x) = C e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\bar{x}}}$$

Das ist die *Gauß-* oder *Normalverteilung*. Die Integrationskonstante wird so bestimmt, dass die Funktion wieder normiert ist. Mit dem Integral:

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{folgt} \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{x}}} \quad \text{bzw.}$$

$$(24) \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \bar{x}}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{\sqrt{\bar{x}}} \right)^2}$$

Durch den Übergang von einer diskreten zu einer kontinuierlichen Zufallsvariable werden die einzelnen (x -) Werte infinitesimal, und deren Wahrscheinlichkeiten gehen gegen Null. Tatsächliche Ereignisse werden jetzt durch Intervalle der Zufallsvariablen gebildet (mit einem durch die Breite bestimmten "Volumen"), deren Wahrscheinlichkeit dann durch die Fläche der Verteilung über dem Intervall beschrieben wird. Die Funktion (24)

stellt die *Wahrscheinlichkeitsdichte* der Zufallsvariablen dar.

Allgemeine Normalverteilung

Die Form (24) ist eine spezielle Normalverteilung mit nur einem Parameter, wobei \bar{X} Erwartungswert (in trivialer Weise wegen der Symmetrie der Verteilung) und Varianz gleichzeitig ist. Die allgemeine Form der Normalverteilung mit unabhängigen Werten von Erwartungswert μ und Varianz σ^2 lautet:

$$(25) \quad N(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

In der folgenden Abbildung sind zwei Normalverteilungen zum gleichen Erwartungswert ($\mu = 5,0$), aber unterschiedlichen Varianzen bzw. Standardabweichungen dargestellt ($\sigma = 0,5$ und $S = 1,5$).

