

Zweisemestriges Grundpraktikum (Anfängerpraktikum) für die Studiengänge Physik, Geophysik, Meteorologie und für Lehramtskandidaten mit Physik als erstem oder zweitem Fach.

### Ziele des Praktikums

Einführung in Grundtechniken quantitativ-experimenteller und wissenschaftlicher Arbeitsmethoden der Physik (Messmethodik, Messtechnik, Messdokumentation, mathematisch-statistische und praktische Auswerteverfahren / Fehlerrechnung, kritische Diskussion und wissenschaftliche Schlussfolgerung, schriftliche Darstellung und Präsentation / Bericht). Vertiefende und ergänzende Auseinandersetzung mit ausgewählten Themen der Physik.

### Kernregeln

- Vor Praktikumsbeginn ist die erfolgreiche Teilnahme am Computerpraktikum obligatorisch.
- Vorbereitung an Hand von Vorlesung und Lehrbüchern nach Angaben im Skript.
- Die Versuche beginnen c.t. und Verspätungen um mehr als 15 Minuten führen dazu, dass die Teilnahme am Versuch nicht mehr möglich ist.
- Eine zweiseitige theoretische Einführung (als Teil des Protokolls) ist zum Versuchsbeginn vorzulegen.
- Die Betreuerin / der Betreuer weist in den Versuch ein und vergewissert sich dabei, ob die Vorbereitung ausreichend oder ein Wiederholungstermin anzusetzen ist.
- Zügige Durchführung des Versuchs und Dokumentation der Ergebnisse erfolgt unter Anleitung der Betreuerin / des Betreuers, wobei die Möglichkeit zur weiterführenden Diskussion des physikalischen Hintergrundes besteht.
- Die tabellarische und graphische Auswertung des Versuchs erfolgt nach ca. 3 Stunden in Wechsel-

wirkung mit der Betreuerin / dem Betreuer; danach weitere Arbeit am Protokoll.

- Die 4 Zeitstunden sind voll zur Anfertigung des Protokolls auszunutzen und können nur dann verkürzt werden, wenn die Betreuerin / der Betreuer das Testat erteilt hat.
- Die volle Versuchszahl (in der Regel 11) ist innerhalb eines Praktikumsurses zu erbringen, wobei maximal 2 Versuche im Rahmen der Wiederholungstermine am Ende des Kurses nachgeholt werden können.
- Spätestens am letzten Tag des Praktikumsurses müssen für alle Versuche Testate vorliegen, da ansonsten das Praktikum insgesamt nicht bewertet werden kann und verfällt.

### Einordnung in den Studiengang

Zwei Praktikumsteile (GP I und II) in Anschluss an die jeweiligen Vorlesungen (Physik I und II). Einschränkungen beim Bezug auf die Vorlesungsinhalte durch den zeitlichen Umfang und die Lage des Praktikums, bei der insbesondere bei der Teilnahme an Ferienkursen Themenbereiche im Praktikum im Vorgriff ohne Vorbereitung durch die Vorlesung behandelt werden müssen (Optik, Atomphysik, Quantenphänomene).

### Durchführung

*Semesterkurse* (wöchentlich, 4stdg) und *Ferienkurse* (fünfwöchig, 2-3 Termine wöchentlich, je 4stdg).

*Kleingruppenpraktikum*. Paarweise Gemeinschaftsarbeit (Durchführung und Ausarbeitung der Versuche). Anleitung von 8-er-Gruppen (4 Paare) an gleichen oder verwandten Versuchen durch wissenschaftliche Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Wichtig ist eine gute Vorbereitung vor dem Praktikumstermin an Hand der Anleitung. Zum Praktikumstermin wird eine etwa zweiseitige Einführung in die Themenstellung und in die physikalischen Grundlagen vorgelegt, die Teil der Ausarbeitung ist.

Praktikumstermin mit *Versuchsdurchführung*, Auswertung und in der Regel Beginn des Protokolls.

Ausarbeitung von *Berichten* mit Einführung in die Themenstellung und physikalischen Grundlagen (zur Vorbereitung erstellt), Darstellung der Auswertungen und einer Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse.

*Unterrichtsmaterial*: Versuchsanleitungen (Skript) mit Aufgabenstellungen, zusammenfassenden Darstellungen der physikalischen Grundlagen und Hinweisen zur Versuchsdurchführung. Laborhefte zur urschriftlichen Aufnahme sämtlicher Aufzeichnungen, die von den Praktikumssteilnehmern selbst zu kaufen sind.

### Bewertung

Übungsschein mit Bewertungsgraden nach ECTS (European Credit Transfer System). Punktesystem für die einzelnen Versuche. Keine Klausuren oder Abschlusscolloquien.

### Versuche

Versuche mit unterschiedlichen Schwerpunkten: Von sehr einfachen, exemplarischen Versuchen in GP I zur Vermittlung methodischer Grundfertigkeiten über Versuche mit höherem messtechnischen Schwierigkeitsgrad und mit weitergehenden physikalischen Ansprüchen bis zu Versuchen mit schwierigen Themen, die erste phänomenologische Begegnungen herstellen sollen, und deren tieferes Verständnis erst bei wiederholter Beschäftigung in späteren Studienabschnitten erreicht werden kann.

### Anmerkungen

Die *Anwendung* erworbener Kenntnisse ist ein empfindlicher Indikator für das Verständnis. Durch Auseinandersetzung mit Details und Anleitung zu kritischer Betrachtung sollen die physikalische Prinzipien und Zusammenhänge zwischen den Phänomenen aufgezeigt werden

Als Teil einer wissenschaftlichen Ausbildung will das Praktikum nicht bei der Vermittlung "mechanistischer" Fähigkeiten stehenbleiben, sondern soll zu *wissenschaftliche Denken* hinführen, d.h. der wissenschaftlichen Beantwortung von Fragestellungen bzw. der Ableitung von Erkenntnissen oder Gesetzmäßigkeiten durch kritische Diskussion in Kleingruppen und schließende Bewertung der Beobachtungen und quantitativen Ergebnisse.

Redaktionsschluss: 20.03.08

Bearbeitung: Schattat

INHALT	GP II
--------	-------

Allgemeiner Teil

Inhaltlicher Ablauf des Praktikums

**Fehler! Textmarke nicht definiert.**

Auszug aus der Praktikumsordnung	3
Punktesystem	3
Bericht/Messprotokoll	4
Musterbericht	5
Standardlehrbücher	12

Versuchsanleitungen

MIK	Mikroskop	13
OPS	Optische Spektroskopie	16
BEU	Beugung und Interferenz	22
FAP	Fabry-Perot-Etalon	26
SPL	Spezifische Ladung des Elektrons	29
MLK	Millikan-Versuch	32
FHZ	Franck-Hertz-Versuch	35
PHO	Photoemission	38
IND	Induktion	46
WSK	Wechselstromkreise	49
HAL	Hall-Effekt	53
TRA	Transistor	56

Anhang

Anlage I Fehlerrechnung	60
Anlage II He-Ne-Laser	62
Anlage III Stromleitung	64
Anlage IV Wechselstromoperatoren	66
Anlage V Halbleiter	67

## PRAKTIKUMSORDNUNG

## GP

Die §§ 1-9 regeln Geltungsbereich, Zulassung, allgemeinen Ablauf, Scheinvergabe und die Anerkennung anderweitig erbrachter Praktikumsleistungen. Die vollständige Praktikumsordnung ist im Praktikumsgebäude ausgelegt und abrufbar unter

[www.physik.fu-berlin.de/~gp/gp](http://www.physik.fu-berlin.de/~gp/gp)

### §10 Organisatorischer und Inhaltlicher Ablauf des Praktikums

(1) Die Praktikumsdurchführung erfordert eigene Vorbereitung, Teilnahme und Mitarbeit an den Vorgesprächen, Durchführung und Auswertung der Messungen und Ausarbeitung der Berichte der nebenstehenden Versuche.

Der Termin- und Arbeitsplan wird durch Aushang im Praktikumsgebäude bekanntgegeben. Nicht ausreichend vorbereitete oder mehr als 15 Minuten verspätete Teilnehmer werden von der Versuchsdurchführung zurückgewiesen. Versäumte Versuche müssen nachgeholt werden.

(2) In der Regel arbeiten je zwei Teilnehmer zusammen, die gemeinschaftlich für die Versuchsdurchführungen und den Abschluss der Versuche (Abschlusstest) verantwortlich sind.

(3) Die Berichte müssen bestimmten inhaltlichen und äußerlichen Anforderungen entsprechen (siehe Abschnitt BERICHT). Fehlende Teile eines Berichts müssen ergänzt, fehlerhafte Darstellungen und Auswertungen korrigiert werden. Berichte, deren äußere Form ein Durchsehen nicht zulässt, werden zurückgewiesen. Die Messprotokolle und die Ausarbeitungen (Berichte) müssen in gebundene Hefte (Laborhefte) eingetragen werden. Geeignete Hefte für die Protokolle müssen von den Teilnehmern selbst gekauft werden. Geeignet sind karierte Hefte (keine Ringordner) mit ca. 50 Blatt, von denen jeder Student mindestens zwei benötigt.

Die Berichte müssen am folgenden Versuchstag vorgelegt werden. Sie werden von den Betreuern durchgesehen und mit den Teilnehmern besprochen (Abschlussbesprechung). Die Erteilung eines Abschlusstests setzt die Teilnahme an der Abschlussbesprechung voraus.

(4) Die Teilnahme an den Praktikumsterminen und der Abschluss der Versuche werden von den Betreuern im Laborheft und auf einer Testatliste abgezeichnet. Die Ausgabe der Übungsscheine erfolgt nur gegen Vorlage der vollständigen Testatliste

(5) Das Praktikum muss in der Woche nach dem letzten Regeltermin vollständig abgeschlossen werden. Ein über diesen Zeitraum hinaus nicht abgeschlossenes Praktikum verfällt insgesamt.

**Eine wesentliche Voraussetzung für eine konstruktive und erfolgreiche Arbeit im Praktikum und den Lernerfolg ist eine intensive physikalisch-inhaltliche Vorbereitung auf den jeweiligen Themenkreis. Die Arbeitsmittel dazu sind Skript, Lehrbücher, Papier und Bleistift und ausreichend Zeit.**

**Als Ergebnis der Vorbereitung muss die (kurze) schriftliche Einführung in die Themen- und Aufgabenstellung (als Teil des Berichts) ausgearbeitet und zu Versuchsbeginn vorgelegt werden. Sie müssen dabei in der Lage sein, das Thema frei, strukturiert und im Zusammenhang darzustellen und Fragen zu beantworten bzw. die eigenen Fragen zu formulieren.**

**Das Praktikum hat spezifische Ausbildungsziele, wobei es physikalische Inhalte vertiefen und ergänzen soll. Es kann aber nicht die Aufgabe der elementaren Stoffvermittlung übernehmen, die auf eine gründliche Mitarbeit in Vorlesungen und Übungen aufbaut.**

## PUNKTESYSTEM

## GP

### Punktesystem im Grundpraktikum

Die Leistungen bei den einzelnen Versuchen werden durch Punkte bewertet. Die Punkte dienen der Beurteilung der Gesamtleistung nach den Regeln des ECTS-Systems (*European Credit Transfer System*).

Nach Abschluss aller Versuche werden folgende Grade vergeben (in % der Maximalpunktzahl):

$90\% \leq A \leq 100\%$	A (Sehr gut = very good)
$75\% \leq B < 90\%$	B (Gut = good)
$60\% \leq C < 75\%$	C (Befriedigend = satisfactory)
$49\% \leq D < 60\%$	D (Ausreichend = sufficient)
$E < 49\%$	E (Nicht ausreichend = fail).

Es erfolgt eine Einzelbewertung der Versuche, wobei für jeden Versuch maximal 5 Punkte vergeben werden können. Die erfolgreiche Bearbeitung eines Versuchs setzt eine mindestens ausreichende Leistung (1 Punkt) voraus.

Für die Bewertung werden die Leistungen in folgenden Teilbereichen herangezogen (Wertungsbereiche):

- A: Physikalische Kenntnisse und Verständnis, Vorbereitung zum Versuch.
- B: Praktische und methodische Fähigkeiten (experimentelles Arbeiten und Versuchsauswertung).
- C: Wissenschaftliche Diskussion und Bericht (Bewertung des Experiments und der Ergebnisse, schriftliche Ausarbeitung)

Die erreichten Punkte werden von den Betreuern im Laborheft, auf der Testatliste und auf der Karteikarte notiert.

## BERICHT

## GP

Schriftliche Aufzeichnungen und Ausarbeitungen sind elementare Bestandteile wissenschaftlicher Arbeit. Sie dienen der Dokumentation und der Kommunikation. Erkenntnisse haben nur dann einen Wert, wenn sie nachvollziehbar, überprüfbar, und für Dritte verfügbar sind. Die Literatur ist der wichtigste Stützpfiler wissenschaftlicher Arbeit.

Die Praktikumsausarbeitungen (*Berichte*) dienen der Übung wissenschaftlich, schriftlicher Darstellungen. Sie sollen einerseits vollständig andererseits knapp und effizient verfasst werden. Diese Abwägung gehört zu den methodischen Lehrzielen des Praktikums. Bezüglich Darstellung und Umfang orientieren sie sich am Musterprotokoll in der GP I Anleitung.

Die Praktikumsberichte bestehen aus *Messprotokoll* und *Ausarbeitung*:

- Das Messprotokoll ist die Dokumentation des experimentellen Ablaufs.

Es muss sämtliche Angaben (Darstellung des experimentellen Aufbaus, Daten, Beobachtungen) enthalten, aus denen auch nach Abbau der Apparatur der Versuch vollständig nachvollzogen und ausgewertet werden kann.

- Die Ausarbeitung dient der Präsentation und Kommunikation.

Sie enthält eine kurze Darstellung der physikalischen Grundlagen und der Fragestellung, die Auswertungen und die Zusammenfassung und kritischen Diskussion der Ergebnisse und die daraus abgeleiteten wissenschaftlichen Schlussfolgerungen.

Die Inhalte und die äußere Form schriftlicher Arbeiten unterliegen hohen Anforderungen an Sorgfalt und Zuverlässigkeit. Versuchsprotokolle und Ausarbeitungen müssen von fachlich qualifizierten Lesern mit vertretbarem Aufwand nachvollzogen und verstanden werden können. Praktikumsberichte, die diesen Anforderungen nicht genügen, werden als nicht ausreichend zurückgewiesen.

Wichtiges Strukturelement schriftlicher Ausarbeitungen sind Gliederungen. Nachfolgend ist eine Standardgliederung beschrieben, die den Praktikumsberichten verbindlich zugrunde liegen muss.

### Messprotokoll

Das Messprotokoll stellt eine sekundäre Quelle der durchgeführten experimentellen Arbeit dar. Es muss über lange Zeit vollständig und verfügbar bleiben. Handschriftliche Aufzeichnungen werden aus diesem Grund urschriftlich in gebundene Hefte (Laborhefte) <sup>1</sup>eingetragen (maschinenschriftliche Teile oder Ausdrucke werden auch hier eingeklebt), die auch im Praktikum zur Führung sämtlicher Aufzeichnungen vorgeschrieben sind. Ausdrucke von Schreibern o.ä. werden eingeklebt.

Gliederungsbestandteile des Messprotokolls sind:

### Titel (Versuchsthema)

#### Namen; Datum

- Namen der Mitarbeiter und des Tutors; Datum des Versuchstags.

### Physikalische Grundlagen

- Kurze und zusammenfassende, eigene Darstellung der physikalischen Grundlagen der Themen- und Fragestellung, der Meßmethode und der Messgleichungen (nicht zulässig sind wörtliche Abschriften aus der Literatur).
- Die Darstellung muss eine kurze, aber vollständige Übersicht über wesentliche Aspekte der untersuchten Größen und Gesetzmäßigkeiten geben. Nicht erforderlich sind lehrbuchartige Ausführungen.
- Thematisch verfehlt sind Beschreibungen der praktischen Versuchsdurchführung.

### Experimenteller Aufbau und Geräte

- Skizze des Versuchsaufbaus; Auflistung der verwendeten Geräte mit den Gerätedaten.

### Messwerte

- Datum, Beginn, Ende
- Größenbezeichnungen mit Maßzahlen, Werte, Fehlergrenzen und Maßeinheiten in unmittelbarer Form. Kommentare zu den Fehlerangaben. Strukturelement: Tabellenform.
- Sonstige Beobachtungen.

### Auswertungen

- Zusammenfassende Darstellung der Auswertungen mit grafischen Darstellungen (auf Original-Netzpapier; an zugehöriger Stelle in den Text einkleben), ausgewerteten Funktionsparametern, Zwischenwerten, Ergebnissen und Fehlergrenzen. Kommentare zur Fehlerbetrachtung. (Strukturelement: Tabellenform).
- Die Auswertung muss die Herleitung der Ergebnisse einfach nachvollziehbar und überprüfbar machen. Sie darf keine Kladde zur Rechnungsdurchführung sein.

### Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Knappe, zusammenfassende Darstellung:

- Was und wie wurde gemessen? (Messgrößen, Messmethode).
- Was ist herausgekommen? (Übersichtliche Auf-führung der Ergebnisse).
- Wie sind die Ergebnisse zu bewerten? (Kritischer, qualitativer und quantitativer Vergleich von Ergebnissen untereinander, mit theoretischen Erwartungen; mit Literaturwerten. Physikalische Bewertung und Schlussfolgerungen, Fehlerdiskussion)

<sup>1</sup> Es müssen min. zwei Laborhefte von ca. 50 Seiten, kariert (keine Ringordner), von den Studierenden gekauft werden, und sie sind am ersten Praktikumstag mitzubringen.

## (1) MUSTERBERICHT

## GPI

(2) FEDERPENDEL*Albert Ach, Paula Puh*(3) Physikalische Grundlagen

## (4) Bei einer idealen Feder ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung (Hookesches Gesetz):

(5) (A)  $F = -D x$

(6) Der Proportionalitätsfaktor  $D$  heißt Federkonstante. In Aufgabe 1 wird dies Gesetz direkt überprüft.*Mit (A) folgt als Newtonsche Bewegungsgleichung, wenn  $m$  die gesamte bewegte Masse ist:*

(B)  $-D x = m \ddot{x}$

*Lösungsansatz ist:*

(C)  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \Phi)$

*wobei  $x_0$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\Phi$  eine Phasenkonstante sind. Für die Kreisfrequenz erhält man durch Einsetzen von (C) in (B):*

(D)  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$

*Die Beziehung (D) für die Schwingungszeit wird in Aufgabe 2 überprüft. Gleichung (B) geht davon aus, dass die gesamte Masse die gleiche Beschleunigung erfährt. Das gilt aber nicht für die Feder selbst. Am Aufhängepunkt sind die Amplitude und Beschleunigung Null, am freien Ende der Feder haben sie die Werte der angehängten Masse.*

## (1) Der nebenstehende Musterbericht zu einem (fiktiven) Versuch stellt ein positives Beispiel und einen Kommentar gegenüber. Er dient zusammen mit den Hinweisen zum Bericht (siehe Darstellung BERICHT) zur Orientierung hinsichtlich Form und Inhalt der im Grundpraktikum geforderten schriftlichen Niederlegung und Darstellung physikalisch-wissenschaftlicher Arbeit.

Sämtliche Teile des Berichts (Darstellung der physikalischen Grundlagen, Messprotokoll, Auswertung, Zusammenfassung und Diskussion) müssen urschriftlich in gebundene Laborhefte eingetragen werden.

Die Darstellung der physikalischen Grundlagen muss zur Vorbereitung vor Versuchsbeginn ausgearbeitet und vorgelegt werden. (Sollte dazu das Laborheft nicht vorliegen, muss die Niederschrift auf zusätzliche Blätter erfolgen, die später in das Laborheft eingeklebt werden).

(2) Zur besseren Übersicht beginnt jeder Bericht auf einer neuen Seite mit dem Titel des Themas.(3) Der Bericht muss durch Überschriften deutlich abgesetzt gegliedert sein.(4) Die Darstellung der physikalischen Grundlagen soll zusammengefasst eine kurze Einführung in das Thema und die Fragestellung des Versuchs geben:

Welche Phänomene oder Prinzipien werden untersucht?

Nach welchen Methoden soll gemessen werden?

(5) Die Darstellung muss sich auf die physikalischen Inhalte beziehen. Sie soll knapp, muss aber vollständig sein. Lehrbuchartige Ausführungen und mathematische Herleitungen von Formeln für elementare Sachverhalte sind nicht erforderlich.(6) Die Darstellung muss eigenständig sein. Literaturhinweise allein oder wörtliche Abschriften oder Kopien des Skripts sind nicht zulässig.

□

- (7) Die Masse der Feder wird durch eine Ersatzmasse (effektive Feder-masse) am Federende berücksichtigt, an der die gleiche Beschleunigungsarbeit geleistet werden muss, und die damit die gleiche kinetische Energie wie die Feder selbst besitzt.

Der Geschwindigkeitsverlauf an der Feder ist linear:

$$(E) \quad v(x) = v_0 \frac{x}{x_0}$$

Die Masseverteilung längs der Feder ist konstant, und für ein Feder-element  $dx$  folgt:

$$(F) \quad dm = m_F \frac{dx}{x_0}$$

Daraus folgt für die gesamte kinetische Energie:

$$(8) \quad E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} v^2 dm = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{x_0^2} \frac{m_F}{x_0} \frac{1}{3} x_0^3$$

$$(G) \quad = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} m_F v_0^2 \right]$$

d.h., die Feder muss mit einem Drittel ihrer Masse berücksichtigt werden.

#### Aufgaben

1. Berechnung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Messung der Auslenkung der Feder.
2. Berechnung der Federkonstanten aus der Schwingungszeit als Federpendel.

- (7) Besondere Sachverhalte und Formeln müssen erläutert bzw. hergeleitet werden.

- (8) Die Wiederholung der Aufgabenstellung dient der Orientierung und dem Verständnis bei den folgenden Aufzeichnungen.

- Messprotokoll
- (9) Paula Puh, Albert Ach;  
 (10) Tutor: Peter Pi;  
 (11) 3.3.1981; Beginn 10.15 Uhr, Ende 12.20 Uhr.
- (12) Geräte
- (13) Stativ mit Spiegelskala (300 mm; Teilung 1 mm).  
 Feder mit Marke und Schale (Apparatur 3).  
 Gewichtssatz ("5/10/20/20/50 g").  
 Handstoppuhr (Ablesegenauigkeit 0,1 s).  
 Waage "Sartorius"; (Ablesegenauigkeit 0,05 g).
- (14) Massen
- $m_5 = 4,99 \text{ g}$  (alle Massenfehler 0,05 g Auflösungfehler)  
 ~~$m_{10} = 9,92 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20} = 19,92 \text{ g}$~~   
 (Messung wegen Nachjustierung des Nullpunkts verworfen).  
 ~~$m_5 = 5,00 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{10} = 9,90 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20} = 19,90 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{20'} = 19,95 \text{ g}$~~   
 ~~$m_{50} = 49,90 \text{ g}$~~
- (17) Federmasse  $m_f = 15,15 \text{ g}$   
 Masse von Marke und Schale  $m_s = 8,50 \text{ g}$   
Zur Messung der Schwingungsdauer (Aufgabe 2)  
 Amplitude ca. 30 mm.  
 Die Schwingungsdauer der unbelasteten Feder konnte nicht gemessen werden, da sie nicht gleichmäßig schwingt.  
 Die Zeiten wurden am Umkehrpunkt gestoppt. Messung von  $10 T$  zur Reduzierung der Reaktionsfehler.
- (9) Die Namen der Autoren und der Betreuerin (des Betreuers) sind wichtig, um zu wissen, wem der Bericht gehört und wer dafür zuständig ist.
- (10) Das Datum ist eine Standardinformation. Die Zeit kann zur nachträglichen Diskussion von Störeinflüssen wichtig sein (Temperaturänderungen, Netzspannungsschwankungen, ...).
- (11) Für die Rekonstruktion des Experiments und die Interpretation der Daten (z.B. Fehlerinformationen) müssen zusammenfassend alle Geräte mit ihren wichtigen Nenndaten aufgeführt werden (Typ, Hersteller; Fehlerangaben).
- (12) Alle Geräteangaben müssen unmittelbar so notiert werden, wie sie angegeben sind (Messbereiche, Empfindlichkeitskoeffizienten, Skalenteilungen, Fehlerangaben, ...).
- (13) Die Angabe, an welchem Versuchsplatz bzw. mit welchen Bauteilen oder Proben gearbeitet wurde, ist zur späteren Rekonstruktion und zum Vergleich von Ergebnissen wichtig.
- (14) Verworfen Werte kenntlich machen (z.B. durchstreichen), aber lesbar erhalten. Keine Daten radieren oder sonst wie vernichten.
- (15) Auch Nullen sind Zahlen; z.B. die Messung nicht mit 5 g, sondern korrekt mit 5,00 g protokollieren. Die Anzahl der Ziffern eines Werts enthält implizit Information über die Genauigkeit und das Auflösungsvermögen des Werts.
- (16) Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist anschaulich und hilft, Bezeichnungen der Geräte und Größen zu verstehen. Bei elektrischen Versuchen ist ein Schaltplan, bei optischen Experimenten der Strahlengang mit der Position der optischen Komponenten unerlässliche Voraussetzung auch zum physikalischen Verständnis der Messdaten.
- (17) Alle Überlegungen und sonstigen Informationen zu den Messungen auch niederschreiben.

(18)

Ausdehnung der Feder unter Belastung (Aufgabe 1)

(19)

(20)

Massen	Pos. Marke	M / g	x / mm
ohne	2,5		0
5	17,0	5,00(5)	14,5
10	31,0	9,90(5)	28,5
10+5	45,5	14,90(7)	43,0
20	59,5	19,90(5)	57,0
20+5	74,0	24,90(7)	71,5
20+10	88,3	29,80(7)	85,5
20+10+5	102,5	34,80(9)	100,0
20+20'	116,0	39,85(7)	114,5
20+20'+5	131,5	44,85(9)	129,0
50	145,5	49,90(5)	143,0
ohne	2,5		

(21)

Schwingungsdauer als Federpendel (Aufgabe 2)

(22)

(23)

(24)

Massen	$10 \cdot T$ / s	M / g	$T^2$ / s <sup>2</sup>
10	5,4	9,90(5)	0,29(4)
20	6,2	19,90(5)	0,38(4)
20+10	7,0	29,80(7)	0,49
20+20'	7,9	39,85(7)	0,62(5)
50	8,7	49,90(5)	0,76
50+10	9,0	59,80(7)	0,81
50+20	9,7	69,80(7)	0,94(6)

AUSWERTUNGAuslenkung in Abhängigkeit der Belastung

Siehe grafische Darstellung Auslenkung  $x$  gegen Auflagemasse  $m$  auf der Folgeseite. Es ergab sich die erwartete Nullpunktgerade mit dem Anstieg:

$$D \cdot g = (0,345 \pm 0,003) \text{ kg m}^{-1}$$

(18)

Über jede Tabelle eine Überschrift setzen, damit zu sehen ist, um welche Messung es sich handelt.

(19)

Längeneinheiten mm und cm nicht verwechseln. Viele Maßstäbe (Meßlatten, Lineale, Schiebelehren) sind in cm kalibriert. Diese Skala hatte eine mm-Teilung.

(20)

Eine Skala kann durch Schätzung zwischen zwei Teilstrichen genauer als auf ein Skalenteil (Skt) abgelesen werden (Schätzstelle; hier die Nachkommastelle). Der Fehler ist aus den Ablesebedingungen zu ermitteln; hier wurde die Obergrenze von einem ganzen Skalenintervall angenommen ( $\pm 0,5$  Skt).

(21)

Die letzte Messung wurde zur Kontrolle der Anfangswert (Nullpunkt) wiederholt.

(22)

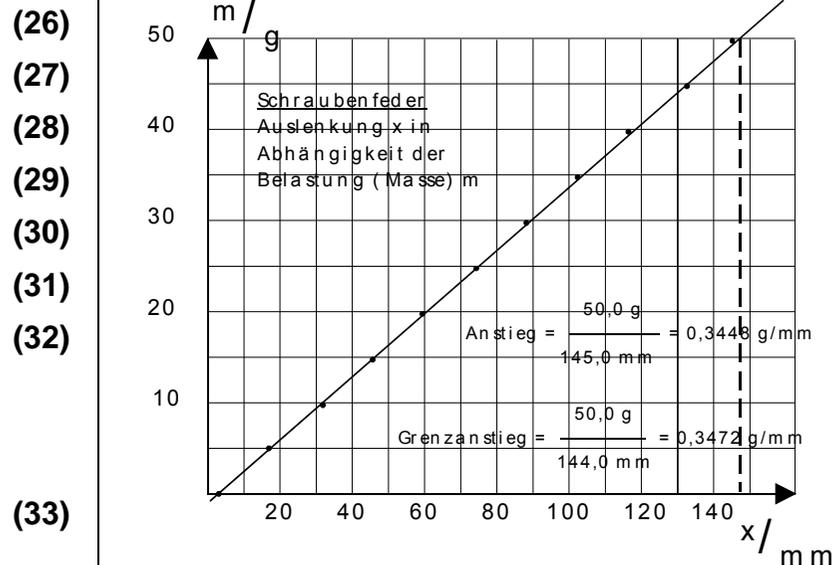
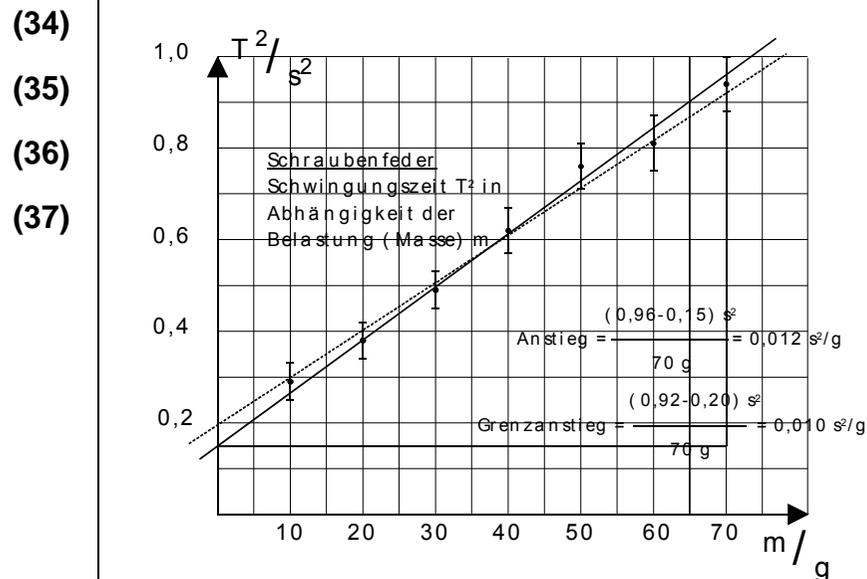
Berechnete Folgewerte zur besseren Übersicht in die Messtabelle integrieren.

(23)

Alle Messungen unmittelbar so notieren, wie sie vorgenommen wurden; also nicht "15 g" oder nur den berechneten Wert 14,90 g schreiben, sondern welche Gewichtsstücke benutzt wurden.

(24)

Fehlerrechnungen und Fehlerwerte nur dann ohne weitere Kommentare anführen, wenn sie rein formal nach den Fehlerfortpflanzungsgesetzen berechnet wurden und dabei alle Eingangsfehler erfassen.

(25) Zu Aufgabe 1: Auslenkung einer Feder unter BelastungZu Aufgabe 2: Schwingungsdauer einer Feder

(25) Zur Ausführung von grafischen Darstellungen siehe Anleitung GRAFISCHE DARSTELLUNGEN UND AUSWERTUNG VON FUNKTIONEN hier im Skript.

(26) Grafische Darstellungen sind auf Original-Netzpapier anzufertigen (mm-Papier, log-Papier; im Praktikum erhältlich). (In der nebenstehenden Abbildung musste aus darstellungstechnischen Gründen auf die korrekte Abbildung von Netzpapier verzichtet werden). Sie sind in den logischen Zusammenhang des Berichts fest einzufügen (einzukleben).

(27) Zur Auswertung herangezogene Darstellungen dürfen aus Genauigkeitsgründen nicht zu klein gewählt werden; Standardfall im Praktikum ist formatfüllendes DIN A4.

(28) Das Netz ist optimal auszunutzen, wobei hinsichtlich der Überprüfbarkeit die Achsenkalierung einfach sein und keine ungeraden oder komplizierten Teilungsmaße enthalten soll (1 Einheit pro 30 mm o.ä.).

(29) Jede Darstellung muss eine Legende tragen (was ist unter welchen Bedingungen dargestellt).

(30) Die Achsen müssen vollständig bezeichnet werden (Skalierung, Größen, Einheiten).

(31) Es müssen sämtliche Messpunkte eingetragen werden. Fehlerbalken genügen für einige, repräsentative Werte, insbesondere, wenn sie konstant sind

(32) Ist die Streuung von Daten sehr gering, so muss eine empfindlichere Darstellung oder ein numerisches Auswerteverfahren in Betracht gezogen werden. In Grenzfällen muss die Genauigkeit der Auflösung und der Einzelwerte zur Fehlerabschätzung herangezogen werden.

(33) Werden Variablen transformiert, so ist dies bei der Achsenbezeichnung zu berücksichtigen.

(34) Es ist ausreichend, nur eine der beiden möglichen Grenzgeraden zur Fehlerabschätzung zu betrachten. Die Fehler ergeben sich als Differenzen zwischen den Ausgleichs- und den Grenzgeraden.

(35) Die zur Berechnung herangezogenen Anstiegsdreiecke sind zur Prüfung einzutragen. Sie sind möglichst groß zu wählen (Achsen Schnittpunkte), um Zeichen- und Ableseungenauigkeiten gering zu halten.

(36) Zur Nachvollziehbarkeit sollen die berechneten Funktionsparameter mit in die Darstellung eingetragen werden.

(37) Bei der Angabe der Parameter ist darauf zu achten, dass es sich im Allgemeinen um dimensionierte Größen handelt, die mit Einheiten anzugeben sind.

(38) Die Fehler  $\Delta m$  sind vernachlässigbar, die Fehler  $\Delta x$  liegen an der Grenze der Darstellungsmöglichkeit (Punktdurchmesser). Zur Abschätzung einer Grenzgeraden wurde unter Berücksichtigung von Zeichengenauigkeit und Streuung ein Fehler von 1 mm bei der Auslenkung angesetzt.

(39) Mit  $g = 9,8128(1) \text{ m/s}^2$  (Angabe im Skript; Fehler vernachlässigbar) folgt für die Federkonstante:

(40) 
$$D = (3,383 \pm 0,024) \text{ N m}^{-1}$$

Aufgabe 2: Auslenkung einer Schraubenfeder unter Belastung

Mit der Masse von Schale und Marke  $m_S$  der effektiven Federmasse nach (G) und der variablen Anhängemasse  $m$  ist nach (D):

$$T^2 = \frac{4 \pi^2}{D} \left( m_S + \frac{1}{3} m_F \right) + \frac{4 \pi^2}{D} m$$

In der transformierten Darstellung von  $T^2$  gegen  $m$  (siehe Vorseite) ergab sich die erwartete Gerade mit dem Anstieg:

$$\frac{4 \pi^2}{D} = (12 \pm 2) \text{ s}^2 \text{ kg}^{-1}$$

Daraus folgt für die Federkonstante:

$$D = (3,29 \pm 0,55) \text{ N m}^{-1}$$

Der Achsenabschnitt ist

$$\frac{4 \pi^2}{D} \left( m_S + \frac{1}{3} m_F \right) = (0,15 \pm 0,05) \text{ s}^2$$

Mit dem obigen Wert für die Federkonstante folgt als effektive Masse der Feder:

$$m_F = (13 \pm 13) \text{ g}$$

(38) Die Fehlerrechnung (Fehlerfortpflanzung, Fehlerabschätzung von Funktionsparametern) ist integraler Bestandteil der Auswertung. Fehlerwerte und Kommentare zur Fehlerrechnung gehören direkt an die Ergebnisse selbst.

(39) Eine Niederschrift rein formaler Fehlerberechnungen (Zahlenwertgleichungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz) ist nicht erforderlich. Dagegen müssen Fehlerwerte immer erläutert werden, wenn bei der Abschätzung besondere individuelle oder lokale Gesichtspunkte berücksichtigt wurden.

(40) Fehler-Zwischenwerte im Auswerteteil sollen zweistellig berücksichtigt und notiert werden.

- (41) *Wobei der D-Wert wegen der besseren Genauigkeit aus Aufgabe 1 übernommen wurde. Der große Fehler resultiert zum einen aus den schlechten Messdaten (Fehler des Achsenabschnitts 34 %), wobei die Vergrößerung auf 100 % sich aus der Differenzbildung in der Auswertbeziehung ergibt.*
- (42) *Bei der Fehlerabschätzung müsste grundsätzlich berücksichtigt werden, dass der Anstieg und der Achsenabschnitt korreliert sind. Das kann hier jedoch außer Betracht bleiben, da der Fehler von D nicht beitragend ist und ebenso wie der der Masse der Schale vernachlässigt wurde.*
- (43) Zusammenfassung und Diskussion
- (44) *Die Messung der Federkonstanten einer Schraubenfeder durch Auslenkung in*
- (45) *Abhängigkeit der Belastung und durch Messung der Periodendauer eines Federpendels ergab übereinstimmende Werte, wobei als Ergebnis der bessere Wert aus*
- (46) *der Auslenkungsmessung herangezogen wird:*
- (47)
- (48) 
$$D = (3,38 \pm 0,03) \text{ N m}^{-1}$$
- (49) *Die Genauigkeit der Bestimmung aus der Schwingungszeit hätte durch Messung einer größeren Anzahl von Perioden gesteigert werden können.*
- Die qualitative und quantitative Übereinstimmung der Messungen untereinander und mit dem erwarteten Verlauf zeigt die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes (A) und des Bewegungsgesetzes (C) mit (D).*
- Aus der Messung der Schwingungszeit in Abhängigkeit von der Anhängemasse ließ sich zusätzlich der Beitrag der Federmasse selbst bestimmen. Das Ergebnis für die Federmasse  $m_{\text{F}}$  mit  $(13 \pm 13) \text{ g}$  steht dabei formal (noch) in Übereinstimmung mit dem auf der Waage ermittelten Messwert von  $(15,15 \pm 0,05) \text{ g}$  und widerspricht zumindest nicht einem Ansatz einer effektiven Federmasse von  $1/3 m_{\text{F}}$ . Der sehr große Fehler muss aber als unbefriedigend angesehen werden, da er an der anderen Grenze auch noch den Schluss zulässt, dass die Feder selbst keinen Anteil zur trägen Masse beiträgt.*
- (41) Fehler müssen in besonderen Fällen diskutiert werden. Welches sind die stark beitragenden Fehler? Was beeinflusst die Fehlerfortpflanzung?
- (42) Bei korrelierten Größen muss zumindest der Maximalfehler berechnet werden. (Besser ist es, die Korrelation zu untersuchen).
- (43) Die Zusammenfassung und Diskussion muss Thema, Ziele und Ergebnisse des Versuchs übersichtlich und auf das Wesentliche bezogen darstellen: Was wurde untersucht? Wie oder nach welchen Methoden wurde gemessen? Welche Ergebnisse sind herausgekommen? Wie sind die Ergebnisse wissenschaftlich zu bewerten?
- (44) Die Ergebnisse sind qualitativ und quantitativ untereinander oder mit Literaturwerten zu vergleichen.
- (45) Werte stimmen überein, wenn sich die Fehlerintervalle überschneiden. Werte sind verträglich, wenn sich die dreifachen Fehlerintervalle überschneiden (Verträglichkeitsmaß). Werte werden erst dann als signifikant unterschiedlich betrachtet, wenn sich auch die dreifachen Fehlerintervalle nicht mehr erreichen.
- (46) Bei Ergebnissen mit unterschiedlichen Fehlern muss ein gewichteter Mittelwert gebildet werden. Bei Ergebnissen mit sehr unterschiedlichen Fehlern wird man den genaueren Wert als Endergebnis heranziehen.
- (47) Ergebnisse sind mit den absoluten Fehlern als Vergleichsgrundlage anzugeben. Der relative Fehler dient ergänzend der Genauigkeitsangabe.
- (48) Fehler von Endergebnissen sind aufgerundet einstellig anzugeben.
- (49) Auch die Fehler müssen in die Diskussion einbezogen werden. Wie könnte die Genauigkeit grundsätzlich apparativ oder methodisch verbessert werden?

## STANDARDLEHRBÜCHER

## GP

Die folgenden Lehrbücher werden verbreitet zur Vermittlung physikalischen Grundwissens herangezogen, wie es für das Physikstudium und die Vorbereitung der Praktikumsarbeit erforderlich ist. Eine Reihe von Lehrbüchern wurden in verschiedenen Auflagen bzw. Jahren herausgegeben, so dass auf eine Angabe des Erscheinungsjahrs verzichtet wurde. Alle Bücher sind in der Lehrbuchsammlung der Fachbereichsbibliothek vorhanden.

obligatorische Literatur

- [1]: **Gerthsen-Kneser-Vogel;**  
Physik;  
Springer-Verlag
- [2]: **Bergmann-Schaefer Band 1 (11. Auflage)**
- [3]: **Bergmann-Schaefer Band 2 (8. Auflage)**
- [4]: **Bergmann-Schaefer Band 3 (9. Auflage)**
- [5]: **Eichler Kronfeld Sahn**  
**Das neue Physiklische Praktikum**

Zusatzliteratur

**Alonso-Finn;**  
Physik;  
Addison-Wesley bzw. Inter European Editions

**Atkins;**  
Physik;  
de Gruyter

Kittel-Knight-Rudermann;

**Berkeley Physik Kurs**  
(1: Mechanik, 2: Elektrizität und Magnetismus,  
3: Schwingungen und Wellen, 4: Quantenphysik,  
5: Statistische Physik);  
Vieweg & Sohn

**Demtröder;**  
Experimentalphysik 1-4;  
Springer-Verlag

**Dransfeld-Kalvius-Kienle-Lucher-Vonach;**  
Physik (I: Mechanik, II: Elektrodynamik,  
IV: Atome-Moleküle-Wärme);  
Oldenbourg

**Feynman-Leighton-Sands;**  
Vorlesungen über Physik (I: Mechanik-Strahlung-  
Wärme, II: Elektromagnetismus und Struktur der  
Materie);  
Oldenbourg

**Hänsel-Neumann;**  
Physik 1-3;  
Spektrum Akademische Verlagsanstalt

**Kohlrausch;**  
Praktische Physik (3: Tafeln);  
Teubner

**Tipler;**  
Physik;  
Spektrum Akademische Verlagsanstalt

**Martienssen;**  
Einführung in die Physik (I: Mechanik,  
II: Elektrodynamik, III: Thermodynamik,  
IV: Schwingungen-Wellen-Quanten);  
Akademische Verlagsgesellschaft

**Otten;**  
Repititorium der Experimentalphysik;  
Springer-Verlag

**PSSC;**  
Vieweg

**Pohl,**  
Einführung in die Physik (1: Mechanik-Akustik-Wärme,  
2: Elektrizitätslehre, 3: Optik-Atomphysik);  
Springer-Verlag

**Zinth-Körner;**  
Physik I-III;  
Oldenbourg

**Westphal;**  
Kleines Lehrbuch der Physik;  
Springer-Verlag

Optik

**Born-Wolf;**  
Principles of Optics;  
Mac Millan

**Fowles;**  
Introduction to Modern Optics;  
Dover Publication Inc.

Atom- und Quantenphysik

**Eisberg-Resnick;**  
Quatum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and  
Particles;  
Wiley & Sons

**Finkelburg;**  
Atomphysik;  
Springer-Verlag

**Haken-Wolf;**  
Atom- und Quantenphysik;  
Springer-Verlag

**Beiser;**  
Atome, Moleküle, Festkörper;  
Vieweg & Sohn

Fehlerrechnung

**Taylor;**  
Fehleranalyse;  
VCH Verlagsgesellschaft

## MIKROSKOP

## GP II

Stichworte

Geometrische Optik; Abbildung durch Linsen. Auflösungsvermögen und Beugungsbegrenzung; Abbesche Theorie, numerische Apertur.

Ziele des Versuchs

Verständnis der Wirkungsweise eines Mikroskops und Einführung in den Umgang mit optischen Komponenten und Instrumenten.

Literatur

[1]: Kapitel 9.2.1 mit 9.2.6

[4]: Kapitel 1.5.1, 3.9, 3.12

Aufgaben

- Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der *Besselschen Methode*.
- Aufbau eines Mikroskop-Strahlenganges. Bestimmung der Vergrößerung für drei verschiedene Tubuslängen und Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen.
- Kalibrierung eines Okularmikrometers (Messokular). Bestimmung des Drahtabstandes (Gitterkonstante) und der Drahtstärke eines Drahtnetzes (Kreuzgitter).
- Überprüfung der *Abbeschen Theorie*. Beobachtung der Auflösungsgrenze des Mikroskops an dem Drahtgitter. Bestimmung der numerischen Apertur für diesen Grenzfall und Vergleich des daraus erwarteten kleinsten auflösbaren Punktabstandes mit den gemessenen Gitterkonstanten.
- Rechenaufgabe: Angabe des kleinsten auflösbaren Punktabstandes für stärkste Objektive (numerische Apertur 1,4 mit Immersionsmittel) und der damit erreichbaren sinnvollen Grenzvergrößerung optischer Mikroskope.

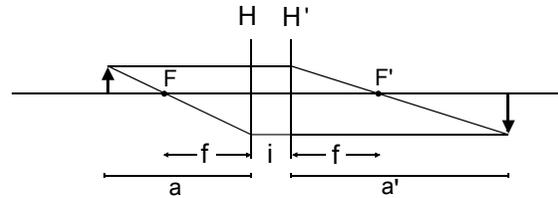
Physikalische GrundlagenAbbildung durch Linsen

Die Abbildung durch eine Linse oder ein zentriertes Linsensystem wird für Lichtbündel in der Umgebung der Symmetrieachse (optische Achse) durch die Abbildungsgleichung beschrieben:

$$(1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

mit dem Abbildungsmaßstab  $\beta = \frac{a'}{a}$

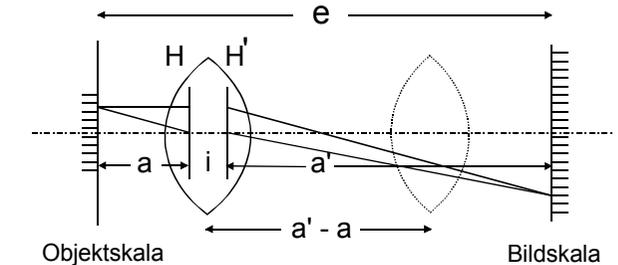
Der *Abbildungsmaßstab*  $\beta$  gibt das lineare Größenverhältnis zwischen dem tatsächlich vorhandenen oder prinzipiell auffangbaren Bild und dem Gegenstand an.



Dabei sind  $a$  die Gegenstandsweite,  $a'$  die Bildweite und  $f$  eine charakteristische Größe des Systems, die *Brennweite*. Das System wird darüber hinaus durch die beiden *Hauptpunkte*  $H$  und  $H'$  auf der Achse bestimmt. Die zugehörigen *Brennpunkte*  $F$  und  $F'$  liegen im Abstand der Brennweite von den Hauptpunkten. Ebenso sind die Gegenstands- und die Bildweite die Entfernungen von den zugeordneten Hauptpunkten. Die Hauptpunkte liegen nicht immer in oder nahe bei der Linse; es gibt Linsensysteme mit Hauptpunkten, die mehrere Brennweiten vom letzten Linsenscheitel entfernt außerhalb liegen.

Bei *dünnen Linsen* ist der Hauptpunktstand  $i$  klein und kann praktisch vernachlässigt werden. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, so dass eine einfache Messung der Brennweite nach (1) wegen des unbekanntenen Hauptpunktstandes nicht möglich ist. Bei der *Besselschen Methode* (*Friedrich Wilhelm Bessel*; 1784-1848; dt. Astronom und Mathematiker) werden bei festem Abstand zwischen Gegenstands- und Bildebene

( $e > 4 \cdot f$ ) sowohl die vergrößernde als auch die verkleinernde Abbildung eingestellt. Gemessen werden der Abstand  $e$ , die Differenz  $a - a'$  (aus der Verschiebung der Linse zwischen den beiden Abbildungen) und der Abbildungsmaßstab  $\beta$ , so dass drei unabhängige Messgrößen vorliegen, mit denen nach (1) die zwei Unbekannten  $f$  und  $i$  bestimmt werden können (siehe Abbildung).



Löst man die Abbildungsgleichung nach  $a'$  bzw.  $a$  auf, und ersetzt das Verhältnis  $a'/a$  durch  $\beta$ , so erhält man für die Brennweite:

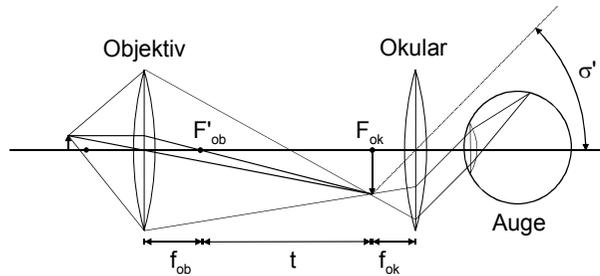
$$(2) \quad f = \frac{a - a'}{\frac{1}{\beta} - \beta}$$

und für den Hauptpunktstand  $i$  aus der Entfernung  $e$  (siehe Abbildung):

$$(3) \quad i = e - (a + a') = e + (a - a') \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$$

Mikroskop

Ein Mikroskop ist ein zweistufiges Abbildungssystem zur Vergrößerung in der Nähe liegender Objekte. Mit einem *Objektiv* wird ein reelles Zwischenbild eines Objekts erzeugt, das mit einem als Lupe wirkendem *Okular* betrachtet wird. Den Abstand  $t$  zwischen den beiden zugewandten Brennpunkten von Objektiv und Okular nennt man die *optische Tubuslänge* des Mikroskops (siehe Abbildung auf der folgenden Seite).



Als *Vergrößerung* eines optischen Instrument bezeichnet man die Vergrößerung des *Sehwinkels*, der die scheinbare Größe eines betrachteten Objekts bestimmt. Die Vergrößerung  $\Gamma$  ist definiert als:

$$(4) \quad \Gamma = \frac{\text{Tangens des Sehwinkels mit Instrument}}{\text{Tangens des Sehwinkels ohne Instrument}} = \frac{\tan \sigma}{\tan \sigma_0}$$

Dabei wird der Sehwinkel ohne Instrument auf die sogenannte *konventionelle Sehweite*  $a_0 = 250 \text{ mm}$  bezogen. Die Begriffe Vergrößerung und Abbildungsmaßstab sind zu unterscheiden.

Die Gesamtvergrößerung eines Mikroskops setzt sich multiplikativ aus dem Abbildungsmaßstab des Objektivs und der Lupenvergrößerung des Okulars zusammen:

$$(5) \quad \Gamma = \beta_{Ob} \Gamma_{Ok}$$

Für den Sehwinkel, unter dem ein (virtuelles) Bild eines Objekts vor der Lupe (Okular) erscheint, gilt:

$$(6) \quad \tan \sigma_{ok} = \frac{y'}{a'} = \frac{y}{a}$$

Damit erhält man als Vergrößerung:

$$(7) \quad \Gamma_{Ok} = \frac{a_0}{a}$$

Für ein auf Unendlich akkomodiertes Auge ist  $a = f_{Ok}$ , d.h.:

$$(8a) \quad \Gamma_{Ok}(\infty) = \frac{a_0}{f_{Ok}}$$

Bei der Versuchsdurchführung wird gleichzeitig zum mikroskopischen Bild eine in  $a_0$  entfernte Vergleichsskala betrachtet, so dass das Auge auf die konventionelle Sehweite akkomodiert ist ( $a = a_0$ ). Aus der Abbildungsgleichung lässt sich dann die Gegenstandsweite  $a$  berechnen (Vorzeichen beachten!), und es folgt:

$$(8b) \quad \Gamma_{Ok}(a_0) = \frac{a_0}{f_{Ok}} + 1$$

Die Lupenvergrößerung wächst mit abnehmender Brennweite, was wegen der notwendigen kleinen Krümmungsradien eine Verkleinerung des Linsendurchmessers und damit eine Reduzierung des Auflösungsvermögens zur Folge hat. Zudem ist bei starken Lupen der freie Arbeitsabstand zwischen Auge und Objekt unbequem klein. Wegen dieser Nachteile verwendet man Lupen bis zu höchstens 30-facher Vergrößerung.

Für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops erhält man mit (5) und (8a bzw. 8b) je nach Akkomodation des Auges:

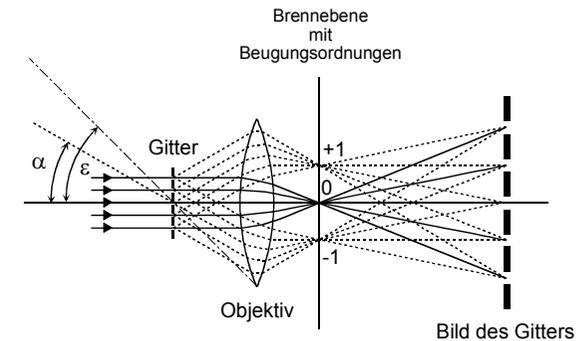
$$(9a) \quad \Gamma_{\infty} = \frac{t}{f_{Ob}} \frac{a_0}{f_{Ok}} \quad \text{bzw.}$$

$$(9b) \quad \Gamma_o = \frac{t}{f_{Ob}} \left[ \frac{a_0}{f_{Ok}} + 1 \right]$$

Auflösungsvermögen des Mikroskops

Im Rahmen der geometrischen Optik sollte es möglich sein, bei genügend großen Tubuslängen und kleinen Objektivbrennweiten gemäß (9a,b) die Vergrößerung beliebig zu erhöhen. Dem entgegen wird jedoch eine Begrenzung des Auflösungsvermögens beobachtet, zu dessen Erklärung wellenoptische Betrachtungsweisen herangezogen, d.h. Interferenz und Beugung berücksichtigt werden müssen.

Die *Abbesche Theorie* der Abbildung (*Ernst Abbe*; 1840 – 1905; dt. Physiker und Sozialreformer) wählte als Objektmodell ein Strichgitter (mit einer Gitterkonstanten  $d$ ), das von einer ebenen Welle beleuchtet wird (siehe Abbildung).



In der Brennebene der Linse entsteht nach dem *Huygens'schem Prinzip* (*Christian Huygens*; 1629 – 1695; nld. Physiker, Mathematiker und Astronom) und durch Interferenz ein ebenfalls linienförmiges Beugungsmuster des Gitters (Beugungsdiagramm). Intensitätsmaxima ergeben sich, wenn alle Teilwellen konstruktiv interferieren, d.h., wenn die Phasendifferenzen der Wellen benachbarter Spalte ein ganzzahlig Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  betragen. Dies ist erfüllt, wenn:

$$(10) \quad \frac{d \sin \alpha}{\lambda} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Charakteristisch ist dabei, dass der Beugungswinkel  $\alpha$  umso größer wird, je kleiner der Abstand  $d$  der Gitterstriche ist.

Im weiteren Verlauf der Strahlen entsteht wiederum durch Interferenz in der Bildebene  $Z$  das Bild des Gitters (siehe Abbildung). Für ein Bild minimaler Ähnlichkeit (periodische Intensitätsverteilung) müssen mindestens die Teilwellen von zwei benachbarten Beugungsordnungen von der Linse erfasst werden, d.h., der Winkel für die 1. Beugungsordnung darf höchstens gleich

dem objektseitigen Öffnungswinkel sein. Damit gilt für die minimale auflösbare Gitterkonstante:

$$(11) \quad d_{\min} = \frac{\lambda}{\sin \varepsilon}$$

Der auflösbare Abstand wird kleiner, wenn der Raum zwischen Objekt und Objektiv durch ein Medium mit dem Brechungsindex  $n$  ausgefüllt wird (Immersionmittel), in dem sich die Wellenlänge um den Faktor  $n$  verkleinert. Die Größe:

$$(12) \quad A = n \sin \varepsilon$$

die zusammen mit der Wellenlänge das Auflösungsvermögen des Mikroskops bestimmt, heißt *numerische Apertur* des Objektivs.

Das Bild in dem oben geschilderten Grenzfall entspricht dem eines Gitters mit  $\sin^2$ -förmiger Transmission. Einzige Information -neben der Orientierung- ist die Gitterkonstante. Um z.B. das Verhältnis der Spaltbreite im Gitter zur Gitterkonstanten zu bestimmen, müssen weitere Beugungsordnungen zur Abbildung beitragen. Die für das Strichgitter angestellten Überlegungen haben auch für beliebig strukturierte Objekte Bedeutung, die formal durch eine Überlagerung von Gittern mit verschiedenen Gitterkonstanten beschrieben werden können (Fourier-Zerlegung; siehe auch Versuch *BEUGUNG UND INTERFERENZ*).

#### Apparatur und Geräte

Zwei 40-mm-Linsen (als Objektiv und Okular). Zwei beleuchtete 1-mm-Skalen als Objekt und Vergleichsskala.

1/10-mm-Skala auf Glasträger (Okularmikrometer). Halbdurchlässiger Spiegel zum Einblenden der Vergleichsskala.

Drahtgitter. Verschiedene Lochblenden.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Der experimentelle Aufbau wurde nach didaktischen Gesichtspunkten gewählt, um einen übersichtlichen und anschaulichen Versuchsaufbau mit offenen Experimentiermöglichkeiten zu schaffen. Das hat jedoch eine geringe Qualität der optischen Abbildung mit zum Teil schwierigeren Messbedingungen zur Folge, so dass die

im Praktikum sonst übliche Messgenauigkeit hier nicht erreicht werden kann.

Aufgaben 1-3 können bei normaler Beleuchtung durchgeführt werden, und nur zur Beobachtung der Auflösungsgrenze in Aufgabe 4 muss der Raum abgedunkelt werden.

#### Zu Aufgabe 1

Als Objektskala sind eine beleuchtete mm-Skala und als Bildskala eine 1/10-mm-Skala auf einem Glasträger vorhanden. Die Bildskala ist rückseitig auf den Glasträger aufgebracht, das heißt, sie befindet sich objektseitig, wenn sie seitenrichtig im Gesichtsfeld der Lupe (des Okulars) erscheint. Eine günstige Entfernung für die beiden Skalen ist  $e = 250$  mm. Direkt vor die auszumessende Linse wird eine (einstellbare) Lochblende aufgestellt, mit der die Helligkeit des Bildes geregelt und Abbildungsfehler durch Begrenzung auf achsennahe Strahlen reduziert werden können. Das Bild und die Bildskala werden mit der zweiten Linse als Lupe betrachtet. Kriterium für eine einwandfreie Abbildung ist *Parallaxenfreiheit*.

Bei der Fehlerrechnung ist zu berücksichtigen, dass der Abbildungsmaßstab  $\beta$  nach (3) mehrfach in die Auswertgleichungen eingeht. Entweder muss das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* in der allgemeinen Form (partielle Ableitungen), oder ein anderes sinnvolles Schätzverfahren angewandt werden.

#### Zu Aufgabe 2

Aus den beiden Linsen wird ein Mikroskop-Strahlengang mit Tubuslängen von  $t = 150, 200$  und  $300$  mm aufgebaut. Zur Reduzierung der Abbildungsfehler und zur Helligkeitsanpassung wird wieder die Lochblende (vom Objekt aus) direkt hinter das Objektiv aufgestellt.

Zur Bestimmung der Vergrößerung wird (vom Auge aus) vor die Okularlinse ein halbdurchlässiger Spiegel im Winkel von etwa  $45^\circ$  aufgestellt, mit dem eine zweite mm-Skala im Abstand von  $a_0 = 250$  mm eingespiegelt und mit der vergrößerten Skala gleichzeitig betrachtet werden kann. Zur Bestimmung der Vergrößerung ist ein möglichst großes Intervall zu vergleichen und die Strichstärke der Skalenteilung zu berücksichtigen.

#### Zu Aufgabe 3

Die Tubuslänge für diese Aufgabe muss  $300$  mm betragen, um eine ausreichende Vergrößerung zum Ausmessen des Drahtnetzes zu erhalten. In die Zwischenbildebene des Mikroskops wird die 1/10-mm-Skala eingesetzt und durch Vergleich mit der Objektskala kalibriert (Okularmikrometer). Anschließend werden an dem Gitter sowohl der Gitterabstand als auch die Drahtstärke gemessen.

#### Zu Aufgabe 4

Die Lochblende wird  $40$  mm hinter dem Objektiv aufgestellt, so dass sie in der Brennebene der Linse liegt. Dabei ist es ausreichend, die Position mit dem Maßstab in etwa festzulegen. Man betrachtet das Drahtnetz und verringert die wirksame Öffnung des Mikroskops durch kleinere Lochblenden soweit, bis die periodische Struktur des Gitters verschwindet. Der Öffnungswinkel  $\varepsilon$  kann dabei aus dem Blendendurchmesser  $B$  und der Objektivbrennweite  $f$  bestimmt werden:

$$(13) \quad \tan \varepsilon = \frac{B/2}{f}$$

## OPTISCHE SPEKTROSKOPIE

## GP II

Stichworte

Dispersion; Prismen. Beugung und Interferenz; Beugungsgitter. Spektralapparate und Spektralanalyse.

Ziele des Versuchs

Phänomenologische und experimentelle Einführung in elementare Grundlagen der optischen Spektroskopie als bedeutsame wissenschaftliche und angewandte Untersuchungsmethode in vielen naturwissenschaftlichen Arbeitsgebieten.

Literatur

[1]: Kapitel 9.1.5, 10.1,1 mit 10.1.6, 13.1, 13.2.3

[4]: Kapitel 2.3, 3.9, 7.6.1

Aufgaben

1. Aufbau und Justierung des Spektrometers (Beleuchtung, Kollimator, Fernrohr).

Wahlweise Aufgabenstellungen am Prismenspektrometer oder am Gitterspektrometer:

Prismenspektrometer

2. Messung des Winkels der brechenden Kante eines Prismas.
3. Aufnahme des Spektrums einer Quecksilber-Spektrallampe zur Kalibrierung des Spektrometers.
4. Eine der nachfolgend angegebenen spektroskopischen Aufgabenstellungen.
5. Aufnahme der Dispersionskurve  $n(\lambda)$  und Bestimmung der differentiellen Dispersion  $dn/d\lambda$  für die 577/579-nm-Linien von Quecksilber.
6. Bestimmung des Auflösungsvermögens des Prismas und Vergleich mit der theoretischen Erwartung.

7. Qualitative Beobachtung und Diskussion des Beugungsspektrums eines Beugungsgitters.

Gitterspektrometer

2. Aufnahme des Spektrums einer Quecksilber-Spektrallampe in der ersten und der zweiten Ordnung und Bestimmung der Gitterkonstanten.
3. Eine der nachfolgend angegebenen spektroskopischen Aufgabenstellungen.
4. Bestimmung des Auflösungsvermögens des Gitters in erster und zweiter Ordnung und Vergleich mit den theoretischen Erwartungen.
5. Qualitative Beobachtung und Diskussion des Dispersionspektrums eines Prismas

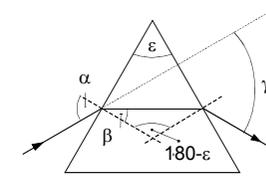
Spektroskopische Aufgabenstellungen

- b) Spektroskopie einer unbekanntes Lampe und Analyse der Lampenfüllung.

Physikalische GrundlagenPrisma

Der Durchgang von Licht durch transparente Medien stellt ein Resonanzphänomen dar mit einer als *Dispersion* bezeichneten Frequenz- bzw. Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex  $n$ . Licht verschiedener Wellenlänge wird demzufolge an einer Grenzfläche unterschiedlich gebrochen und so in seine spektralen Anteile zerlegt.

An einem Prisma hängt der gesamte Ablenkwinkel bei Durchgang durch die beiden Grenzflächen neben dem Brechungsindex zusätzlich von der Richtung des einfallenden Lichtes ab. Einfache Verhältnisse ergeben sich für den Sonderfall, dass ein Lichtstrahl das Prisma parallel zur Basis und damit symmetrisch durchsetzt. Der gesamte Ablenkwinkel wird in diesem Fall minimal (*Minimalablenkung*). Für den Eintritts- und Austrittswinkel an einer der Grenzflächen folgt aus den geometrischen Verhältnissen (siehe folgende Abbildung):



$$\beta = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$\gamma = 2(\alpha - \beta) \quad \text{bzw.}$$

$$(1) \quad \alpha = \frac{\gamma + \epsilon}{2}$$

wobei  $\epsilon$  der Winkel der *brechenden Kante* des Prismas ist. Aus dem Brechungsgesetz lässt sich dann mit (1) der Brechungsindex des Prismenmediums berechnen. (Der Brechungsindex  $n_0$  der umgebenden Luft hat den Wert 1,0003).

Prismen finden in der Spektroskopie oder zur Lichtfilterung Anwendung. Als *Dispersionsvermögen* eines Prismas wird die Winkeldifferenz zwischen der Ablenkung roten und violetten Lichts bezeichnet. Es bestimmt das Auflösungsvermögen des Prismas und die "Länge" des Spektrums.

Das Dispersionsvermögen und der Brechungsindex sind unabhängig voneinander. So ist der Brechungsindex von Flintglas nur wenig größer als der von Kron- glas, das Dispersionsvermögen dagegen fast doppelt so groß. Das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen Glassorten ermöglicht die Konstruktion von Prismen, die stark ablenken, aber nicht dispergieren (Ablenkprisma, *achromatisches Prisma*) oder von Prismen, die dispergieren, aber nicht ablenken (*Geradsichtprisma*).

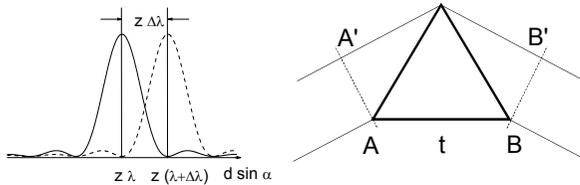
Auflösungskriterien

Die Festlegung des Auflösungsvermögens eines Spektralapparats erfordert eine konventionelle Festlegung darüber, wann zwei Spektrallinien als getrennt betrachtet werden sollen. Allgemein, aber praktikabel ist das *Sparrow-Kriterium*, wonach zwei Linien als getrennt anzusehen sind, wenn sie ein relatives Minimum besitzen. Quantitativ bestimmter ist das *Rayleigh-Kriterium* (*John William Strutt*, seit 1873 *Baron Rayleigh*; 1842-1919; engl. Physiker), dass Linien dann als getrennt zu betrachten sind, wenn das Beugungsmaximum der einen Linie mit dem ersten Beugungsminimum der anderen Linie zusammenfällt (siehe Abbildung). Die Intensität im Minimum dieser Doppellinie fällt dann auf den Wert  $8/\pi^2$  des Maximums.

Auflösungsvermögen des Prismas

Das endliche Auflösungsvermögen des Prismas ist beugungsbedingt, da es eine Begrenzung für den Strahlengang darstellt. Es lässt sich aus einer Betrachtung der optischen Weglängen am Prisma herleiten (siehe Abbildung).

A-A' und B-B' stellen zwei Wellenfronten vor und hinter dem Prisma dar, die zu einer Ablenkrichtung gehören, unter der entsprechend dem *Rayleigh-Kriterium* für die Wellenlänge  $\lambda$  das Hauptmaximum und für die Wellenlänge  $\lambda+\Delta\lambda$  das erste Nebenminimum liegen sollen.



Rayleigh-Kriterium

Auflösung am Prisma

Für das Hauptmaximum (zu  $\lambda$ ) dürfen die Strahlen keinen Gangunterschied aufweisen, während das erste Nebenminimum im Beugungsdiagramms (zu  $\lambda+\Delta\lambda$ ) dann entsteht, wenn die Randstrahlen gerade einen Gangunterschied von einer Wellenlänge aufweisen (siehe Versuch *BEUGUNG UND INTERFERENZ*).

Für den Brechungsindex in Abhängigkeit von  $\lambda$  soll für die kleine Wellenlängendifferenz näherungsweise ein linearer Ansatz herangezogen werden:

$$(2) \quad n(\lambda) = n \quad \text{und} \quad n(\lambda + \Delta\lambda) = n + \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Da der optische Weg von A' nach B' wegen  $n \approx 1$  für beide Wellenlängen gleich ist, muss ein Gangunterschied von  $\lambda$  an der Basis des Prismas (Basislänge  $t$ ) entstehen:

$$(3) \quad \left( n + \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda \right) t - n t = \lambda$$

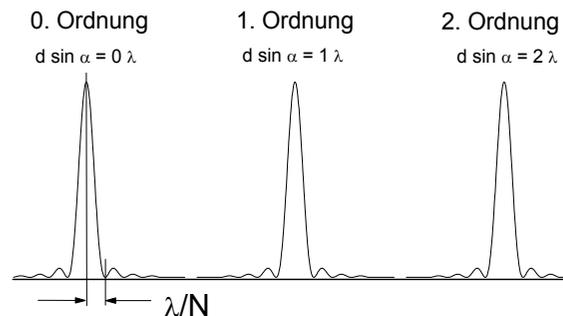
Das Auflösungsvermögen des Prismas wird demnach durch die Basislänge  $t$  (die die Öffnung des Prismas darstellt) und die *differentielle Dispersion*  $dn/d\lambda$  bestimmt.

Beugungsgitter

Ein Gitter ist in einer einfachen Vorstellung eine Blende mit einer periodischen Folge scharf und undurchlässig begrenzter Spalte. Praktisch gebräuchliche Gitter werden z.B. durch Ritzen einer Glasplatte hergestellt und entsprechen diesem Bild nicht. Allgemein wird von einem Gitter immer dann gesprochen, wenn bei einem Objekt eine Transmission (oder Reflexion) periodisch im Abstand  $d$ , der *Gitterkonstanten*, wiederkehrt.

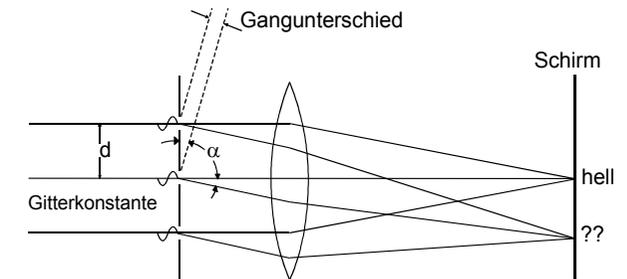
Beleuchtet man ein Gitter mit kohärentem Licht bzw. modellmäßig mit einer monochromatischen, ebenen Welle, so beobachtet man hinter dem Gitter eine ebenfalls periodische Intensitätsverteilung, die durch die Prinzipien von Beugung und Interferenz erklärt werden kann. Vergleichsweise einfache Verhältnisse ergeben sich für eine *Aufpunkzebene* (Beobachtungsebene) im Unendlichen, die praktisch durch eine nachfolgende Sammellinse hinter dem Gitter realisiert werden kann. Die so entstehende Intensitätsverteilung heißt *Fraunhofersches Beugungsdiagramm* (Joseph Fraunhofer, 1787-1826, dt. Optiker und Physiker).

Dabei entstehen scharfe *Beugungsmaxima* (Hauptmaxima), die durch breite Zonen mit weitgehender Auslöschung getrennt sind (siehe Abbildung; in der Abbildung sind die Zonen der Auslöschung zur zeichnerischen Auflösung der Nebenmaxima unmaßstäblich breit dargestellt):



Die Hauptmaxima lassen sich vergleichsweise einfach aus der Bedingung herleiten, dass der Gangunterschied von Strahlen benachbarter Spalte für *konstruktive Interferenz* ein ganzzahlig Vielfaches der Wellenlänge betragen muss (siehe Abbildung):

$$(4) \quad d \sin \alpha = z \lambda \quad \text{mit} \quad z = 0, 1, 2, \dots$$



Die Laufzahl  $z$  wird als *Ordnung* der Beugungsmaxima bezeichnet. Da bei gegebenen Gitterkonstanten die Lage der Maxima neben der Ordnung nur von der Wellenlänge abhängig ist, können mit Hilfe des Gitters (absolute) Wellenlängenmessungen vorgenommen werden.

Auflösungsvermögen des Gitters

Neben den durch (4) gegebenen Hauptmaxima existiert eine Folge von Nebenmaxima, deren Intensität aber mit zunehmendem Abstand vom Hauptmaximum sehr schnell gegen Null geht. Die Lage des ersten Nebenminimums der Ordnung  $z$  ist gegeben durch:

$$(5) \quad d \sin \alpha_{\min} = \left( z + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

wenn  $N$  die Gesamtzahl der beitragenden Gitterspalte ist. (Für gerades  $N$  kann diese Beziehung in Strenge abgeleitet werden, indem man sich das Gitter in zwei gleiche Abschnitte mit halber Spaltzahl geteilt denkt, und die Spalte paarweise destruktiv, d.h. mit dem Gangunterschied  $\lambda/2$ , interferieren lässt).

Setzt man gemäß dem *Rayleigh-Kriterium* für das Hauptmaximum die Bedingung (4) mit einer Wellenlänge  $\lambda+\Delta\lambda$  und für das Nebenminimum die Bedingung (5)

mit der Wellenlänge  $\lambda$  ein, so folgt für die auflösbare Wellenlängendifferenz bzw. für das Auflösungsvermögen:

$$(6) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{zN} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = zN$$

d.h. das Auflösungsvermögen steigt mit wachsender Spaltzahl und mit steigender Ordnung.

### Wasserstoffspektrum und Rydbergkonstante

Im Jahre 1885 fand der Schweizer Mathematiker und Physiker *Johann Jakob Balmer* (1825-1898) bei der empirischen Analyse der charakteristischen Linienserie des Wasserstoff (*Balmer-Serie*), dass sich die Wellenzahlen der Linien als Differenz zweier Terme schreiben lassen:

$$(7) \quad \frac{1}{\lambda} = R \left[ \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad \text{mit} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Diese Entdeckung wurde später eine wichtige Stütze des *Bohrschen-Atommodells* (*Niels Bohr*, dän. Physiker; 1885-1962), nach der die Strahlung der Atome durch den Übergang von Elektronen zwischen zwei Niveaus verursacht wird. Die Konstante  $R$  in der Beziehung ist die *Rydberg-Konstante* (*Johannes Rydberg*, 1854-1919; schwed. Physiker):

$$(8) \quad R = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3 c}$$

### Apparatur und Geräte

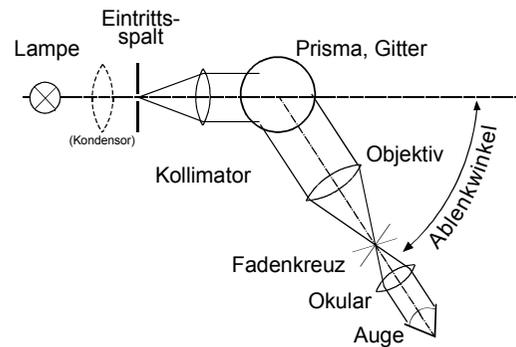
Goniometeraufbau (Winkel-Messeinrichtung) aus Dreikantschienen mit neig- und drehbarem Prismen- bzw. Gittertisch.

Optische Komponenten: Eintrittsspalt, Kollimatorlinse, Objektiv, Okular mit Fadenkreuz.

Justier-Fadenkreuz (zur Winkelmessung am Prisma), Messspalt (zum Auflösungsvermögen). Spektrallampen mit Netzgerät: Hg-Lampe, unbekannte Lampen.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

Ein Spektralapparat (Spektrometer) für visuelle Beobachtung besteht aus einem Goniometer zur Winkelmessung, einem Eintrittsspalt mit Kollimator zur Erzeugung parallelen Lichts, dem dispersiven Element (Prisma, Gitter) und einem Beobachtungsfernrohr. Es wird meist durch einen Beleuchtungsapparat ergänzt, der dem Spektrometer das zu untersuchende Licht zuführt (Kondensator). Siehe auch Abbildung.



### Justierung

Voraussetzung für quantitativ einwandfreie Ergebnisse optischer Experimente ist eine sehr sorgfältige Justierung des optischen Aufbaus, durch die darüber hinaus ein Verständnis für die Grundlagen der geometrischen Optik vermittelt wird.

Zur Festlegung der Höhenachse sind die Kollimatorlinse und das Objektiv in der Höhe fest eingestellt. Die übrigen Bauteile müssen gut auf diese Höhe ausgerichtet werden.

Ein Beleuchtungsapparat ist wegen der hohen Leuchtdichte der Lampen nicht erforderlich, und zur Justierung wird die Hg-Spektrallampe direkt hinter den Eintrittsspalt aufgestellt. Der Spalt stellt eine (in einer Raumrichtung) näherungsweise punktförmige, sekundäre Lichtquelle dar.

Die Justierung des Kollimators erfolgt durch Autokollimation. Das vom Kollimator ausgehende Licht wird an einem auf dem Prismen-tisch aufgestellten Spiegel reflektiert, wobei der Spalt bei richtiger Justierung des Kollimators scharf auf sich selbst zurück abgebildet

wird. Die Justierung kann bei etwas seitlich verschobener Abbildung auf die eine Spaltbacke kontrolliert werden.

Das Fadenkreuz des Okulars wird bei entspanntem Auge gegen einen diffus beleuchteten Hintergrund fokussiert. Das Okular wird dann am Ende des schwenkbaren Arms des Goniometers aufgestellt.

Die Objektivlinse wird schließlich so justiert, dass der Spalt scharf auf die Beobachtungsebene im Okular abgebildet wird. Kriterium für eine einwandfreie Justierung ist Parallaxenfreiheit, d.h. dass sich das Spaltbild und das Fadenkreuz bei seitlicher Bewegung des Auges nicht gegeneinander verschieben. Ursachen für ein schlechtes Spaltbild können, neben falscher Justierung des Kollimators oder des Objektivs, ein zu weit geöffnetes oder geschlossenes, ein schräggestelltes oder ein verschmutztes Spalt sein. Eine leichte Überstrahlung des Spaltes lässt sich dagegen unter den gegebenen Umständen nicht vermeiden.

Der Winkel zwischen der Kollimator- und der Fernrohrachse kann an einer Winkelskala mit einem 1/100-Grad-Nonius abgelesen werden. Zur Gewährleistung einer hohen Ablesesicherheit ist der Gebrauch des Nonius vor Beginn der Messungen zu üben.

### Fehlerschätzung

Insbesondere bei optischen Versuchen sind alle Mess-einstellungen zu wiederholen (Kontrollmessung), um aus der Reproduzierbarkeit bzw. den beobachteten Abweichungen Aussagen über die Fehler treffen zu können (Schätzfehler).

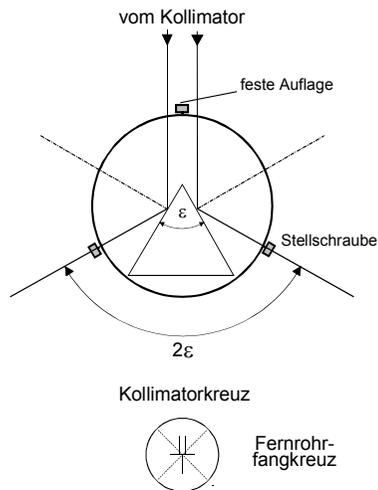
### Prismenspektrometer

Zu Aufgabe 1 (Winkel der brechenden Kante; siehe Abbildung auf der folgenden Seite)

Zur Winkelmessung an der brechenden Kante wird an Stelle des Eintrittsspalts ein Fadenkreuz auf einer Mattscheibe in den Strahlengang gesetzt (Fadenkreuz zum Fernrohr), scharf gestellt und in der Höhe so ausgerichtet, dass die Schnittpunkte der beiden Fadenkreuze (im Kollimator und im Okular) zur Deckung gebracht werden können.

Der Prismentisch wird zunächst nach Augenmaß horizontal ausgerichtet und so gedreht, dass eine der drei Neigungs-Stellschrauben zum Kollimator zeigt, und die beiden anderen entsprechend in die Beobachtungsrichtungen.

Dann wird das Prisma so auf dem Prismentisch aufgestellt, dass das von den beiden Seitenflächen reflektierte Licht mit dem Fadenkreuz im Fernrohr beobachtet werden kann.



Das Prisma muss dabei vergleichsweise weit zum Fernrohr verschoben sein, da die Ausleuchtung sehr schmal ist und die Seitenflächen nur an der Spitze des Prismas trifft.

Nun wird die Ausrichtung der Prismenseitenflächen senkrecht zur optischen Achse fein justiert, indem man sukzessive auf beiden Seiten die Fadenkreuze beobachtet und durch Justierung an den jeweils gegenüberliegenden Stellschrauben auf gleiche Höhe ausrichtet. Die Einstellungen sind so lange fortzuführen, bis die Höhe auf beiden Seiten übereinstimmt.

Zum Schluss wird dann die Winkeldifferenz der beiden reflektierten Fadenkreuzschnittpunkte zur Bestimmung des Winkels der brechenden Kante des Prismas gemessen.

### Zu Aufgabe 2 (Kalibrierkurve)

Das Prisma wird nun in Ablenkposition gebracht, wobei wieder auf eine gute Ausleuchtung zu achten ist. Dann wird die Minimalablenkung für die 546-nm-Linie eingestellt, und das gesamte Spektrum der Quecksilberlampe aufgenommen. Die Positionen der optischen Komponenten auf den Dreikantschienen, und insbesondere die Position des Prismas, darf während dieser und den folgenden Messungen nicht verändert werden, da dabei die Zuordnung zwischen Wellenlängen und Ablenkwinkel (Kalibrierung) verloren gehen würde.

Zur Auswertung wird der Zusammenhang zwischen Wellenlängen und Ablenkwinkeln grafisch darzustellen. Um dabei der Genauigkeit der Messungen zu entsprechen, ist diese Kalibrierkurve auf DIN-A4-mm-Papier anzufertigen!

### Zu Aufgabe 3 (Spektroskopische Aufgabe)

Siehe nachfolgende Hinweise zu den spektroskopischen Aufgabenstellungen.

### Zu Aufgabe 4 (Dispersionskurve und differentielle Dispersion)

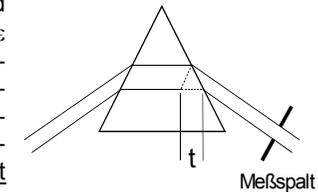
Für die Hauptlinien des Hg-Spektrums (579, 577, 546, 492, 436 und 405 nm) wird die Minimalablenkung einzeln eingestellt und die Ablenkung gemessen. Aus den Messungen können, ausgehend von (1), die Brechungsindizes berechnet und die Dispersionskurve  $n(\lambda)$  grafisch dargestellt werden. Die differentielle Dispersion für die 579/577-nm-Linien bestimmt man durch Konstruktion eines Tangenten an die Kurve bei dieser Wellenlänge.

### Zu Aufgabe 5 (Auflösungsvermögen)

Da die Wellenlängen der Linien nicht verändert werden können, muss zur Realisation der Auflösungsgrenze die optisch wirksame Basislänge  $t$  des Prismas verkleinert werden. Dazu wird in den Kollimatorstrahlengang direkt vor dem Prisma ein zusätzlicher Messspalt eingebracht und soweit geschlossen, bis ein geeignetes und auf Minimalablenkung eingestelltes Linienpaar unter subjektiver Berücksichtigung der Auflösereiterien (*Sparrow* bzw. *Rayleigh*) gerade noch getrennt erscheint.

Die Untersuchung wird an dem 579,1/577,0-nm-Linienpaar von Quecksilber durchgeführt. Das experimentell beobachtete Auflösungsvermögen ergibt sich dann aus dem Verhältnis des Mittelwerts der Linien zur Differenz, und der theoretisch erwartete Wert aus Gleichung (3).

Die wirksame Basislänge  $t$  lässt sich aus der eingestellten Spaltöffnung  $b$ , dem Ablenkwinkel  $\gamma$  und dem Prismenwinkel  $\varepsilon$  berechnen. Bei den Ableseungen an der Mikrometerschraube des Messspalts ist zu berücksichtigen, dass der Nullpunkt willkürlich verschoben liegt, und dass die Skala hinsichtlich der Öffnung des Spalts rückwärts zählt.



### Zu Aufgabe 6 (Gitterspektrum)

Das Prisma wird durch ein Gitter ausgetauscht. Die charakteristischen Unterschiede der Spektren sind zu beobachten, zu protokollieren und im Bericht kurz qualitativ zu diskutieren.

### Gitterspektrometer

#### Zu Aufgabe 1 (Gitterkonstante)

Das Gitter wird in den Strahlengang eingebracht (Orientierung des Gitters siehe Platzskript) und durch Beobachtung des auf den Spalt zurückgeworfenen Reflexes der Gitterträger-Oberfläche sorgfältig senkrecht zum Strahlengang justiert (*Autokollimation*).

Die Furchen des verwendeten Gitters sind asymmetrisch geritzt (*geblaztes Gitter*), wodurch für einen bestimmten Wellenlängenbereich die größte Intensität in eine bestimmte Ablenkrichtung und eine bestimmte Ordnung gebracht werden kann.

In der 1. Ordnung ist das gesamte, beobachtbare Spektrum der Hg-Lampe aufzunehmen, und in der 2. Ordnung die Hauptlinien (579, 577, 546, 492, 436 und 405 nm). Wegen der hohen Genauigkeit der Messung ist eine grafische Auswertung in diesem Fall ungeeignet.

#### Zu Aufgabe 2 (Spektroskopische Aufgabe)

Siehe nachfolgende Hinweise zu den spektroskopischen Aufgabenstellungen.

#### Zu Aufgabe 3 (Auflösungsvermögen)

Da die Wellenlängen der Linien nicht verändert werden können, muss zur Realisation der Auflösungsgrenze der wirksame Bereich des Gitters verringert werden. Dazu wird in den Kollimator direkt vor das Gitter ein zusätzlicher Mess-Spalt eingebracht und soweit geschlossen, bis ein geeignetes Linienpaar unter subjektiver Berücksichtigung der Auflösungskriterien (*Sparrow* bzw. *Rayleigh*) gerade noch getrennt erscheint.

Die Untersuchung wird an dem 579,1/577,0-nm-Linienpaar von Quecksilber durchgeführt. Das experimentell beobachtete Auflösungsvermögen ergibt sich dann aus dem Verhältnis des Mittelwerts der Linien zur Differenz, und der theoretisch erwartete Wert aus Gleichung (6).

Die Zahl der Gitterspalte lässt sich aus der durch den Mess-Spalt begrenzten, wirksamen Gitterbreite und der Gitterkonstanten berechnen. Bei den Ablesungen an der Mikrometerschraube des Mess-Spalts ist zu berücksichtigen, dass der Nullpunkt willkürlich verschoben liegt, und dass die Skala hinsichtlich der Öffnung des Spalts rückwärts zählt.

#### Zu Aufgabe 5 (Prismenspektrum)

Das Gitter wird durch ein Prisma ausgetauscht. Die charakteristischen Unterschiede der Spektren sind zu beobachten, zu protokollieren und im Bericht kurz qualitativ zu diskutieren.

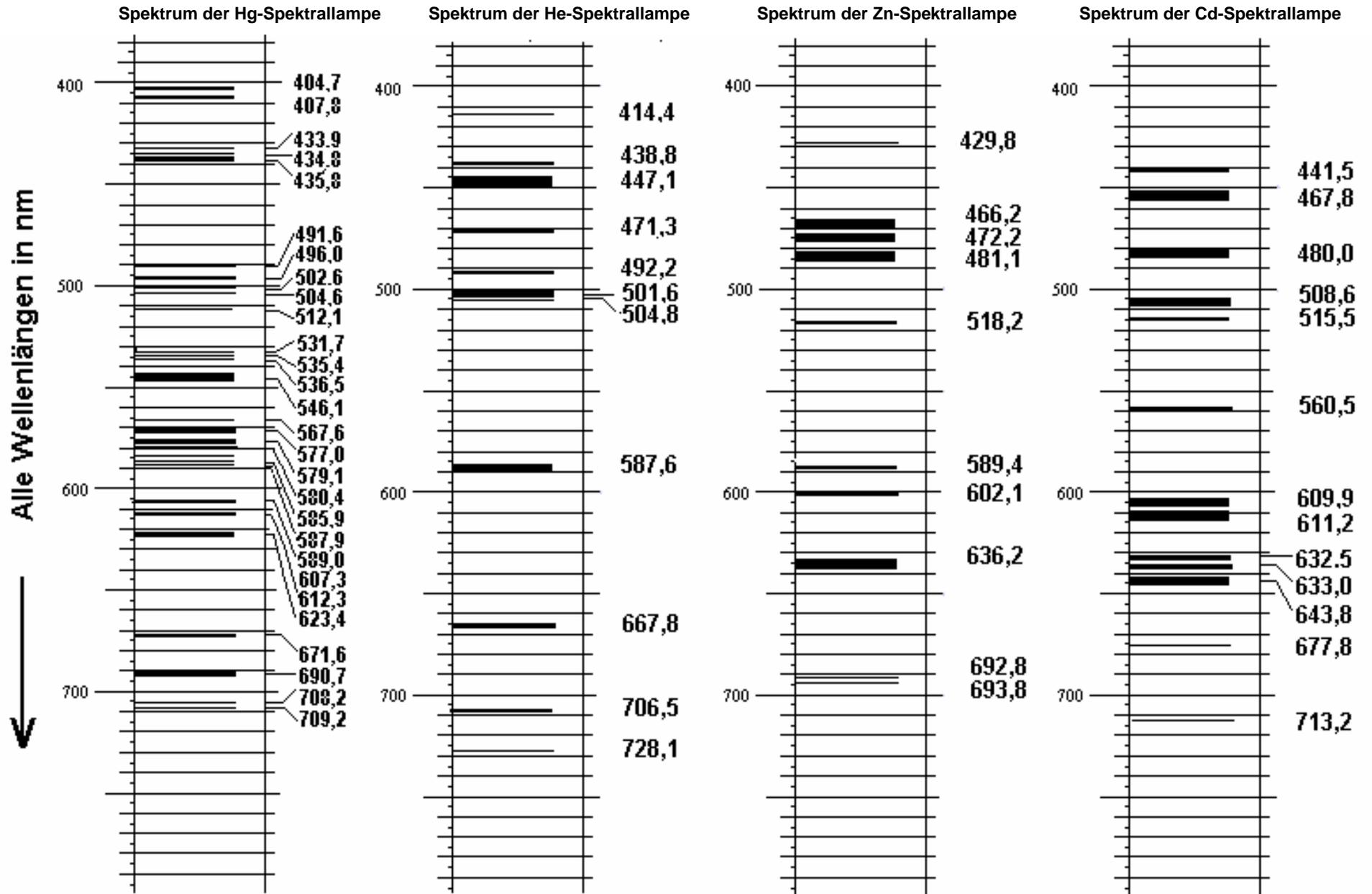
#### Zu den spektroskopischen Aufgabenstellungen

##### Unbekannte Lampen

Es werden das Spektrum einer (der drei vorhandenen) unbekannt Lampen aufgenommen und die beobachteten Wellenlängen aus der Kalibrierkurve bzw. mit der Gitterkonstanten bestimmt. Das Ergebnis ist anhand der Tabelle ausgewählter Spektrallinien im Anhang dieses Skripts zu analysieren.

##### Spektrallinien

Spektrum der Hg-Spektrallampe und Spektrallinien von Cd, He und Zn siehe Folgeseite.



## BEUGUNG UND INTERFERENZ

## GP II

Stichworte

Wellenoptik; *Huygenssches Prinzip*. Kohärenz. Beugung und Interferenz an Spalt und Gitter.

Ziele des Versuchs

Experimentelle Einführung in Beugungsphänomene. Wellenoptische Betrachtung der optischen Abbildung (*Abbesche Theorie*) und des Zusammenhanges zwischen Beugungsdiagramm und Bild eines Objekts. Exemplarische Untersuchung der *Bildfilterung*.

Literatur

[1]: Kapitel 10.1.1 mit 10.1.7

[4]: Kapitel 3.8, 3.10

Aufgaben

Es können wahlweise die Aufgaben zu einer Apparatur mit einer thermischen Spektrallampe (Versuch A) oder mit einem He-Ne-Laser durchgeführt werden (Versuch B).

Aufgaben zur Na-Spektrallampe (Versuch A)

- A1. Aufbau des Strahlenganges und Bestimmung des Abbildungsmaßstabes der mikroskopischen Abbildung.
- A2. Bestimmung der Spaltbreite eines Einfachspaltes aus dem Bild des Spaltes und aus dem *Fraunhoferschen* Beugungsdiagramm. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse.
- A3. Bestimmung der Spaltbreiten und des Spaltabstandes eines Doppelspaltes wie unter Aufgabe A2.
- A4. Bestimmung der Gitterkonstanten eines Beugungsgitters wie unter Aufgabe A2.
- A5. Untersuchung des Bildes des Gitters bei Ausblendung verschiedener Beugungsordnungen aus

dem Beugungsdiagramm des Gitters (Bildfilterung).

Aufgaben zum He-Ne-Laser (Versuch B)

- B1. Aufnahme des *Fraunhoferschen* Beugungsdiagramms eines Mess-Spaltes für drei verschiedene Spaltbreiten. Vergleich und Diskussion der Ergebnisse.
- B2. Aufnahme des Beugungsdiagramms eines Doppelspaltes und Bestimmung der Spaltbreiten und des Spaltabstandes.
- B3. Bestimmung der Teilungsabstände eines Metallmaßstabes aus dem Beugungsdiagramm der Teilung bei streifendem Einfall (Reflexionsgitter).

Physikalische GrundlagenHuygenssches Prinzip

Die geometrisch optische Betrachtung mit einer geradlinigen Ausbreitung des Lichts versagt, wenn in Strahlengängen quer zur Ausbreitungsrichtung Begrenzungen des Wellenfeldes oder Strukturen von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes auftreten. Das *Huygenssche Prinzip* (*Christian Huygens*; 1629-1695; nld. Physiker, Mathematiker und Astronom) ist ein geeignetes Hilfsmittel, mit dem die dabei auftretenden Beugungserscheinungen und auch das Auflösungsvermögen bei optischen Abbildungen vollständig beschrieben werden kann. Es besagt, dass alle Punkte einer Wellenfläche Ausgangspunkte kohärenter Kugelwellen mit Amplitude und Phase der einfallenden Welle sind (Elementarwellen). Die Berechnung von Amplitude und Phase in einem beliebigen Aufpunkt geschieht dann durch Überlagerung (Summation) sämtlicher Elementarwellen, die diesen Aufpunkt erreichen.

Fraunhofersches Beugungsdiagramm

Vergleichsweise einfache Verhältnisse ergeben sich für den wichtigen Grenzfall einer ebenen Welle und mit einer parallelen Aufpunkzebene im Unendlichen. Die Intensitätsverteilung, die sich dabei für ein Objekt im Strahlengang einstellt, wird als *Fraunhofersches Beugungsdiagramm* bezeichnet (*Joseph Fraunhofer*, 1787-1826; dt. Optiker und Physiker). Es lässt sich

durch Integration der von den Öffnungen des Objekts ausgehenden Elementarwellen berechnen, wobei für jede Elementarwelle der *Gangunterschied* zu dem jeweiligen Aufpunkt berücksichtigt werden muss. Im Experiment lassen sich die oben genannten Bedingungen (ebene Welle, Aufpunkzebene im Unendlichen) durch Sammellinsen realisieren, mit denen die Quelle und die Aufpunkzebene in das Endliche verlegt werden können. Oder einfacher noch durch eine Laserlichtquelle, die näherungsweise ebene Wellen abstrahlt, und bei der wegen der hohen Intensität die Aufpunkzebene hinreichend weit entfernt sein kann.

Abbildung eines Objekts

Die Abbildung eines mit parallelem Licht beleuchteten Objekts lässt sich durch eine zweimalige Anwendung des *Huygensschen Prinzips* vollständig beschreiben. In der Brennebene der abbildenden Linse entsteht zunächst das *Fraunhofersche Beugungsdiagramm*. Dies kann dann wiederum als Ausgangsfläche von Elementarwellen aufgefasst werden, die in der Bildebene das Bild des Objekts entstehen lassen. Die Zerlegung des Abbildungsvorgangs in diese zwei Stufen wird als *Abbesche Theorie* bezeichnet (*Ernst Abbe*; 1840-1905; dt. Physiker und Sozialreformer), mit der insbesondere das Auflösungsvermögen des Mikroskops abgeschätzt werden kann (siehe Versuch *GEOMETRISCHE OPTIK*). Die zweite Stufe des *Abbeschen* Ansatzes vom Beugungsdiagramm zum Bild führt schon bei einfachen Objekten zu umfangreichen Berechnungen, jedoch ist es gerade auch ein qualitatives Ziel dieses Versuchs, den Zusammenhang zwischen Beugungsdiagramm und Bild zu erläutern.

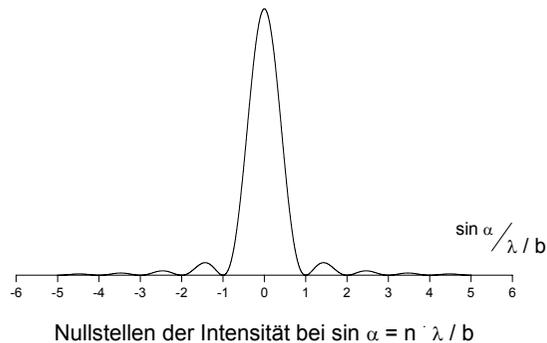
Beugungsdiagramm eines Spaltes

Die Berechnung der Beugungsdiagramme ist schwierig, so dass hier nur die Ergebnisse angegeben und kurz diskutiert werden sollen. Im Allgemeinen sind die Intensitätsverteilungen eine Funktion des Winkels  $\alpha$  bzw. von  $\sin \alpha$  gegenüber der Ausbreitungsrichtung. Für einen Einfachspalt der Breite  $b$  ergibt sich, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge des Lichtes ist:

$$(1) \quad I_{sp}(\sin \alpha) \approx b^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha\right)^2}$$

Die Funktion (1) wird Null für

$$(2) \quad \sin \alpha = \pm n \frac{\lambda}{b} \quad \text{für } n=1,2,3,\dots$$



Der Amplitudenverlauf [Wurzel aus (1)] lässt sich vereinfachend herleiten, indem der Spalt gedanklich in Teilspalte zerlegt, die Interferenz benachbarter Teilbündel betrachtet, und zum Schluss die Anzahl der Teilspalte gegen unendlich geführt wird.

#### Beugungsdiagramm des Doppelspalts

Die Intensitätsverteilung für den Doppelspalt setzt sich aus einem Faktor für die Beugung am einfachen Spalt entsprechend (1) und einem Faktor für das Zusammenwirken der beiden Spalte im Abstand  $d$  zusammen:

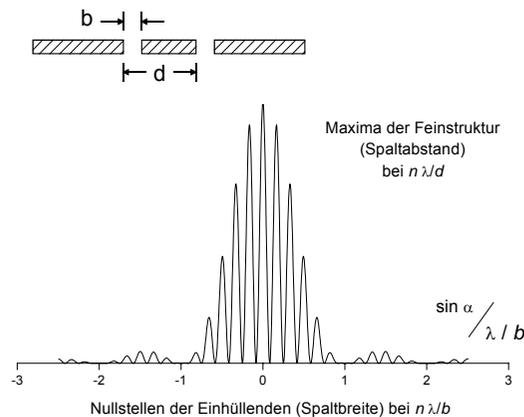
$$(3) \quad I_{Dsp} = I_{sp} I_d = I_{sp} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha\right)$$

Die Funktion  $I_d$  hat Maxima für:

$$(4) \quad \sin \alpha = \pm n \frac{\lambda}{d} \quad \text{für } n=1,2,3,\dots$$

Das Beugungsdiagramm enthält so eine Folge von Maxima im Abstand  $\lambda/d$ , deren Höhe durch eine aus

der Spaltbreite resultierenden Einhüllenden bestimmt wird (siehe Abbildung auf der folgenden Spalte).



#### Beugungsdiagramm des Gitters

Das *Fraunhofersche Beugungsdiagramm* eines Gitters hat Ähnlichkeit mit dem des Doppelspaltes, und die Lage der Maxima wird auch hier durch die Beziehung (4) beschrieben, wobei der Spaltabstand dann als *Gitterkonstante* bezeichnet wird. Der entscheidende Unterschied zum Doppelspalt liegt in der Breite der Maxima. Sie ist beim Doppelspalt von der Größenordnung des halben Abstands der Maxima, beim Gitter dagegen von der Größenordnung  $1/N$  des Abstands, wenn  $N$  die Anzahl der Gitterspalte ist (siehe Versuch *OPTISCHE SPEKTROMETER*). Gitter mit großer Spaltzahl ergeben so sehr scharfe Beugungsmaxima, die das Gitter zu einem wichtigen Hilfsmittel der Spektroskopie machen.

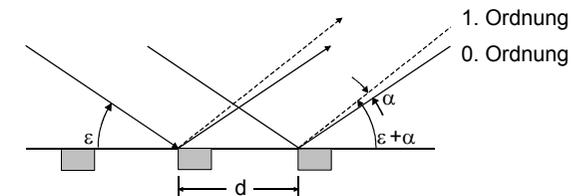
#### Beugungsdiagramm bei Reflexion an einem Gitter

In Aufgabe B.3 soll die Teilung eines Metallmaßstabes untersucht werden, indem dieser unter einem kleinen Einfallswinkel  $\varepsilon$  streifend beleuchtet wird. Die Skalentei-

lung des Maßstabes erscheint dann als Reflexionsgitter mit der Gitterkonstanten  $d \sin \varepsilon$ , wenn  $d$  der Teilungsabstand des Maßstabes ist.

Die Beziehung für die Lage der Maxima ist gegenüber Gleichung (4) zu modifizieren, die nur für den Sonderfall senkrechten Lichteinfalls gilt. Der wirksame Gangunterschied benachbarter Strahlen ergibt sich auch hier aus einfachen geometrischen Überlegungen (siehe Abbildung):

$$(5) \quad d [\cos \varepsilon - \cos (\varepsilon + \alpha)] = n \lambda$$



#### He-Ne-Laser

Im Versuch B werden die gleichen Aufgabenstellungen nur mit anderer experimenteller Ausstattung durchgeführt. Als Quelle kohärenten Lichts wird ein He-Ne-Laser benutzt, bei dem die Beugungsdiagramme wegen der großen Intensität direkt in großer Entfernung (ca. 5 m) als gute Näherung für  $\infty$  beobachtet werden können. Die physikalischen Grundlagen und die Funktionsweise des Lasers sind im Skript *HE-NE-LASER* in Anlage II dieser Praktikumsanleitung beschrieben.

#### Apparatur und Geräte

##### Versuch Teil A (Na-Spektrallampe)

Optische Bank (Dreikantschiene). Bauteile mit Stift auf Reiter:

Na-Spektrallampe, Eintrittsspalt, Kollimatorlinse, Filterhalter für die Objekte, Objektivlinse und Messokular. Objekte (Spalt, Doppelspalt, Gitter).

Blendschieber zum Ausblenden von Beugungsordnungen im Beugungsdiagramm.

Versuch B (He-Ne-Laser)

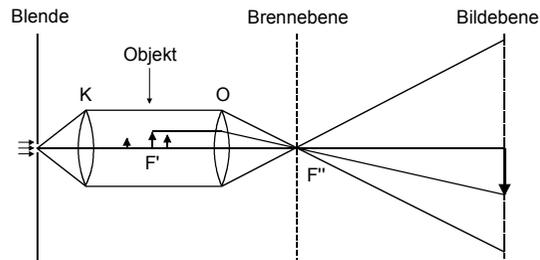
Bauteile mit Stift auf Magnethalter:

He-Ne-Laser, Filterhalter mit Doppelspalt, Präzisions-Messspalt, geneigter Metallmaßstab.

X-Y-Schreiber mit photoempfindlichen Widerstand (LDR), Papierrolle (Additionsrolle) zum Aufzeichnen der Beugungsdiagramme. 5-m-Festmaßstab, 1-m-Metallmaßstab.

Versuchsdurchführung und AuswertungZu Versuch A (Na-Spektrallampe)

Der optische Aufbau wird entsprechend der folgenden Abbildung eingerichtet und justiert. (BI = Eintrittsspalt, K = Kollimatorlinse, Objekt = Filterträger zur Aufnahme der Objekte, O = Objektivlinse, F = Beobachtungsebene für das *Fraunhofer'sche Beugungsdiagramm*, B = Bildebene). Genauere Hinweise zum Aufbau sind im Platzskript angegeben.



Die abschließende Justierung der Apparatur zur Herstellung optimaler Abbildungs- und Beobachtungsverhältnisse muss sorgfältig durchgeführt werden, da die Qualität der Messergebnisse hiervon stark abhängig ist.

Zum Ausmessen der Bilder bzw. der Beugungsdiagramme ist ein Messokular vorhanden, bei dem eine Linie durch eine Mikrometerschraube senkrecht zur optischen Achse bewegt und mit der die Bilder bzw. die Beugungsdiagramme ausgemessen werden können.

Die Positionen des Messokulars zur Beobachtung in der Beugungs- und der Bildebene sind apparativ bzw.

durch einen für alle Aufgabenstellungen beizubehaltenden Abbildungsmaßstab vorgegeben. Zur Fixierung dieser Positionen sind zwei Anschlagreiter vorhanden, und bei den Messungen ist darauf zu achten, dass das Messokular jeweils auf diesen Positionen steht.

Die zur Auswertung benötigte Brennweite des Objektivs ist im Platzskript angegeben. Die Wellenlängen der gelben Na-D-Doppellinien betragen  $\lambda_1 = 589,0$  nm und  $\lambda_2 = 589,6$  nm.

Zu Aufgabe A.1 (Abbildungsmaßstab)

Es ist eine mm-Skala in einem Dia-Rahmen vorhanden, mit der der Abbildungsmaßstab bestimmt werden kann. Die Positionen des Objektivs und des Messokulars am Ende der optischen Bank müssen für die folgenden Messungen beibehalten werden, da die Kalibrierung von diesen Positionen abhängig ist, und die Fokussierung muss jeweils durch Verschieben der zu untersuchenden Objekte erfolgen.

Zu Aufgabe A.2 (Spalt) und zu Aufgabe A.3 (Doppelspalt)

Zum Ausmessen der Bilder und der Beugungsdiagramme können die Helligkeitsverhältnisse durch Einstellung des Eintrittsspalts geeignet angepasst werden. Insbesondere beim Doppelspalt ist es vorteilhaft, für die unterschiedlichen Strukturen (Einhüllende, Feinaufspaltung) unterschiedliche Helligkeiten zu wählen.

Zu Aufgabe A.4 (Gitter)

Die Fokussierung des Gitters ist schwierig und muss besonders kritisch und sorgfältig erfolgen, da sich auch bei bestimmten Defokussierungen scharfe, periodische Strukturen bei der Abbildung ergeben.

Zu Aufgabe A.5 (Bildfilterung)

Es ist ein Blendenschieber vorhanden, der in die Brennebene des Objektivs gebracht wird (Ebene des Beugungsdiagramms). Der Blendenschieber muss sorgfältig justiert werden, indem bei herausgenommenem Objekt der Eintrittsspalt scharf auf den Steg der zweiten Blende abgebildet wird. Der Schieber muss sich dabei in ingerasteter Stellung befinden (Kugelrasten), und die seitliche Ausrichtung des Schiebers muss

durch Lösen der Rändel-Feststellschrauben justiert werden.

Die Blenden beziehen sich auf das Gitter als Objekt und haben folgende Funktionen:

- Blende 1:* Keine Ausblendung.
- Blende 2:* Ausblendung des Maximums 0. Ordnung.
- Blende 3:* Durchgang (nur) der 0. Ordnung.
- Blende 4:* Durchgang der 0. und eines Maximums 1. Ordnung (Schrägfeldbeleuchtung).
- Blende 5:* Durchgang der 0. und der  $\pm 1$ . Ordnung.
- Blende 6:* Durchgang der 0., 2. und 4. Ordnung.
- Blende 7:* Durchgang der 0., 3. und 6. Ordnung.

Nach Wiedereinsetzen des Gitters ist das Bild des Gitters bei Einschalten der verschiedenen Blenden zu beobachten und zu beschreiben und in der Ausarbeitung zu diskutieren.

Insbesondere die Stegblende (Blende 2) ist auch auf die mm-Skala als Objekt anzuwenden.

Versuch B (Laser)Zu Aufgabe B.1 (Spalt) und B.2 (Doppelspalt)

Die Registrierung der Beugungsdiagramme erfolgt mit einem lichtempfindlichen Widerstand (LDR = Light-Dependent-Resistor) innerhalb einer Spannungsteilerschaltung, wobei die Teilspannung über dem LDR als Intensitätssignal am Y-Eingang eines X-Y-Schreibers (X-Y-t-Schreiber) gemessen wird.

Der LDR ist auf das X-Schreibportal des Schreibers montiert. Wird das Portal quer zur optischen Achse des Aufbaus durchgeföhren, so zeichnet der Schreiber die Beugungsdiagramme direkt auf. Zum Durchfahren des Schreibportals wird eine Sägezahnspannung benutzt (Zeit-Ablenkung des Schreibers).

X-Y-Schreiber sind empfindliche Instrumente und müssen sorgfältig behandelt werden! Besondere Hinweise zum Umgang mit dem Schreiber sind im Platzskript angegeben.

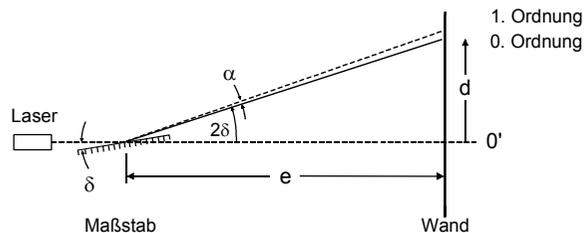
Die Eingangsempfindlichkeit (Y) des Schreibers muss so eingestellt werden, dass die ersten Nebenmaxima der Beugungsdiagramme das Papierformat ausnutzen. Die Intensität des zentralen Maximums übersteigt die der Nebenmaxima um ein Vielfaches. Dies ist jedoch experimentell unerheblich, da der Schreiber mit einer

Begrenzungseinrichtung ausgestattet ist und dabei nicht überlastet wird. Der Vorschub in X-Richtung (Zeitbasis) muss ausreichend langsam erfolgen (5 s/cm), damit die Diagramme nicht durch die elektrischen und mechanischen Zeitkonstanten des Schreibers verfälscht werden.

Die Entfernung von den Beugungsobjekten wird mit einem 5-m-Festmaßstab (Alu-Vierkantröhr mit Abstandsmarkierungen) und einem zusätzlichen 1-m-Metallmaßstab bestimmt. Der Festmaßstab trägt zwei Strichmarkierungen und wird fest und in gleicher Höhe zwischen den Beugungsobjekten und dem LDR (Eintrittsspalt) positioniert. Mit dem Metallmaßstab können dann die zusätzlichen Entfernungen zu den Beugungsobjekten und zum LDR-Eintrittsspalt gemessen werden.

#### Zu Aufgabe B.3 (Teilung eines Metallmaßstabes)

Der Metallmaßstab ist auf einem keilförmigen Träger montiert und kann so unter streifendem Lichteinfall in den Strahlengang gebracht werden. Das (erheblich ausgedehnte) Beugungsdiagramm wird an der gegenüberliegenden Wand registriert, indem ein Papierstreifen auf die Wand aufspannt (Befestigung mit Magneten) und die Beugungsmaxima (einschließlich der Schätzfehler) auf dem Streifen markiert werden (siehe auch Abbildung).



Zur späteren Auswertung müssen die Lage des 0. Maximums gekennzeichnet und zur Bestimmung des Einfallswinkels  $\varepsilon$  zusätzlich der direkte Aufpunkt des Laser-Strahls ohne Beugungsobjekt markiert werden. Der Einfallswinkel  $\varepsilon$  ist vergleichsweise groß und soll bei der späteren Auswertung nicht in der Näherung  $\sin \varepsilon = \tan \varepsilon$ , sondern genau berücksichtigt werden. Der Abstand zwischen dem Maßstab und der Projektions-

wand wird wieder mit dem Festmaßstab und dem Metallmaßstab bestimmt.

Zur Auswertung wird zur besseren statistischen Beurteilung der Messung  $\cos(\varepsilon+\alpha)$  der Beugungsmaxima gegen die Ordnung grafisch dargestellt. Die Wellenlänge der roten He-Ne-Laserstrahlung beträgt  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ .

Überlegen und diskutieren Sie, unter welchen Umständen die Meßmethode zur Absolutmessung der Teilung geeignet ist.

## FABRY-PEROT-ETALON

## GP II

Stichworte

Beugung und Interferenz; Vielstrahlinterferenz. Interferenzspektrometer; *Fabry-Perot-Interferometer* bzw. *Fabry-Perot-Resonator*; Optische Resonatoren

Ziele des Versuchs

Experimentelle Einführung in das *Fabry-Perot-Interferometer* als wichtigem Bauteil hochauflösender Spektralapparate und der Lasertechnik.

Literatur

[1]: Kapitel 10.1.2, 10.1.3, 10.2.13

[4]: Kapitel 3.4, 3.5

Aufgaben

1. Aufbau und Justierung der Apparatur.
2. Bestimmung des Plattenabstandes eines *Fabry-Perot-Etalons* mit der roten 643,9-nm-Linie von Cadmium und Berechnung der (ungefähren) Interferenzordnung.
3. Relative Bestimmung der Wellenlängen der grünen und der dunkelblauen Linie des Cadmium-Spektrums.
4. Abschätzung der Linienbreite der Interferenzmaxima für die rote Linie und Vergleich mit der erwarteten instrumentellen Linienbreite.

Physikalische GrundlagenVielstrahlinterferenz

Beugungsobjekte mit periodischen Strukturen, wie z.B. das Beugungsgitter, führen zu *Vielstrahlinterferenzen* mit sehr schmalen Interferenzmaxima, die ein hohes

Auflösungsvermögen bei messtechnischen und spektroskopischen Anwendungen ermöglichen.

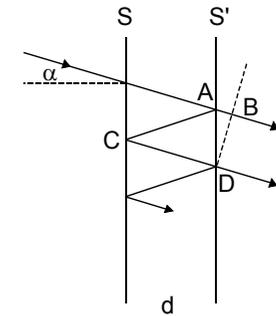
Bei der Beugung und Interferenz an einem Einfach- oder einem Doppelspalt entsteht ein Intensitätsmaximum in einem Aufpunkt durch die Phasengleichheit aller beteiligten Elementarwellen. Eine Abweichung (Verstimmung) von dieser Aufpunkttrichtung verursacht unpassende Gangunterschiede und damit Anteile destruktiver Interferenz, was zu einer Intensitätsabnahme gegenüber dem Maximum und der Ausprägung der entsprechenden Beugungsdiagramme führt (siehe auch Versuch *BEUGUNG UND INTERFERENZ*).

Keht die beugende Struktur periodisch wieder, so vergrößert und vervielfacht sich dieser Gangunterschied gemäß dem Abstand und der Anzahl der Strukturen und bewirkt einen sehr viel schnelleren Abfall der Intensität vom Maximum aus. Vielstrahlinterferenzen sind durch schmale Maxima gekennzeichnet, die durch breite dunkle Zonen getrennt sind (oder entsprechend umgekehrt bei Vielstrahlinterferenzen im reflektierten Licht).

Fabry-Perot-Etalon

Ein *Fabry-Perot-Etalon* ist ein *optischer Resonator*, der aus zwei planparallelen, teilverspiegelten Grenzflächen und einem eingeschlossenen optischen Medium gebildet wird. Eine einfallende, ebene Welle wird durch "Zick-Zack-Reflexionen" in eine Vielzahl kohärenter Teilwellen aufgespalten, die miteinander interferieren und zu Vielstrahlinterferenzen im reflektierten oder im transmittierten Licht führen. In der nachstehenden Abbildung ist der Strahlengang durch einen Etalon skizziert. (Auf die Berücksichtigung von Brechung an den Grenzflächen wurde verzichtet, da durch sie lediglich eine Parallelversetzung der Strahlen bewirkt wird).

In der Abbildung ist eine Wellenfront zweier Strahlen eingetragen, die durch Aufspaltung eines einfallenden Strahls hervorgegangen sind. Als Gangunterschied  $\delta$  ergibt sich aus einer vergleichsweise einfachen, geometrischen Betrachtung:



$$(1) \quad \delta = \overline{AC} + \overline{CD} - \overline{AB} = 2 d \cos \alpha$$

wenn  $d$  der Grenzflächenabstand und  $\alpha$  der Einfallswinkel der Strahlung sind.

Der Gangunterschied ist demnach umso kleiner, je größer der Einfallswinkel  $\alpha$  ist. Ein zusätzlicher Gangunterschied durch Phasensprünge bei den Reflexionen an den Grenzflächen kann unberücksichtigt bleiben, da er für Transmission zusammen jeweils ein ganzzahlig Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Die Interferenzbedingung für konstruktive Interferenz im transmittierten Licht lautet damit:

$$(2) \quad \delta = 2 d \cos \alpha = z \lambda \quad \text{mit} \quad z = 1, 2, 3, \dots$$

wobei Interferenzmaxima entstehen, wenn der Einfallswinkel  $\alpha$  oder die Wellenlänge  $\lambda$  der Bedingung (2) genügen. Der Gangunterschied in Einheiten der Wellenlänge wird *Phasengröße*  $\phi$  genannt ( $\phi = \delta/\lambda$ ), die ganzzahligen Werte  $z$  von  $\phi$  heißen *Interferenzordnung* des Maximums.

Die hohe Güte eines solchen optischen Resonators und das damit verbundene hohe Auflösungsvermögen (für kleine Spektralbereiche) beruht auf der Vielstrahlinterferenz und der hohen Interferenzordnung bei entsprechend großen Resonatorabmessungen. Bei einem Plattenabstand von 5 mm und einer Wellenlänge von 500 nm beträgt die Interferenzordnung  $z = 20\,000$ , wobei sich bei einer derart großen optischen Weglänge schon sehr geringe Wellenlängendifferenzen zu destruktiven Gangunterschieden aufsummieren.

Freier Spektralbereich

Der ungestört untersuchbare Wellenlängenbereich eines Spektralapparats wird als *freier Spektralbereich* oder *Dispersionsgebiet* bezeichnet. Beim Etalon können sich zwei benachbarte Maxima durch einen Ordnungsunterschied  $\Delta z = 1$  bei gleicher Wellenlänge, oder aber durch eine kleine Wellenlängendifferenz  $\Delta\lambda$  bei gleicher Ordnung unterscheiden. Die Interferenzbedingung (2) für eine bestimmte Ordnung lautet für die beiden Fälle:

$$(3) \quad (z+1)\lambda = z(\lambda + \Delta\lambda)$$

Daraus ergibt sich der freie Spektralbereich des Etalons zu:

$$(4) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{z}$$

Wegen dieses bei großen  $z$  vergleichsweise kleinen Dispersionsgebiets eignet sich der *Fabry-Perot-Etalon* bevorzugt zur Untersuchung nahezu monochromatischen Lichts oder zur Feinuntersuchung enger Wellenlängenbereiche nach einer Vorzerlegung. Im Praktikum wird ein Etalon zur Untersuchung der *Zeeman-Aufspaltung* atomarer Zustände in homogenen Magnetfeldern eingesetzt (Versuch *ZEEMAN-EFFEKT*).

Fabry-Perot-Spektrometer

In der Anwendung als Spektrometer werden der Etalon mit divergentem Licht beleuchtet, und die zu einer bestimmten Interferenzordnung gehörenden parallelen Strahlen mit einer Sammellinse auf eine Beobachtungsebene abgebildet. Aufgrund der Rotationssymmetrie der optischen Anordnung erhält man in der Brennebene der Linse konzentrische Ringe gleicher Neigung (*Haidingersche Ringe*; *Wilhelm Ritter von Haidinger*, 1795-1871; östr. Geologe und Mineraloge). Setzt man für den Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\cos \alpha$  näherungsweise:

$$(5) \quad \alpha = \frac{r}{f} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$$

wobei  $f$  die Brennweite der Linse ist, so ergibt sich für die Interferenzbedingung (2):

(6)

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left[ 1 - \frac{r^2}{2f^2} \right] \quad \text{oder} \quad \frac{2d}{\lambda} \approx z \left[ 1 + \frac{r^2}{2f^2} \right]$$

Bei bekannter Linsenbrennweite  $f$  enthält (6) die Größen  $\lambda$ ,  $d$  und  $z$ . Misst man wenigstens zwei Radien des Ringsystems, so erhält man zwei Gleichungen des Typs (6) und kann die Ordnung  $z$  eliminieren. Bezeichnet man den innersten beobachtbaren Ring mit dem Index 0 (das Ringzentrum wird im Allgemeinen kein Interferenzmaximum darstellen), und die Folgeringe mit dem Index  $i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ), so folgt aus (6)

$$(7) \quad d = i \frac{\lambda f^2}{r_i^2 - r_0^2}$$

Relative Wellenlängenmessungen sind auch ohne Kenntnis von  $d$  oder  $z$  möglich. Sie  $r$  und  $r'$  die Radien einer Ordnung zu den Wellenlängen  $\lambda$  und  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ , so folgt aus (6) in Näherung:

$$(8) \quad \Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{2f^2} (r^2 - r'^2)$$

Die Genauigkeit ist dabei (neben dem Fehler der Brennweite  $f$ ) durch die Messgenauigkeit der Radien bestimmt, und das oben erwähnte hohe Auflösungsvermögen des Etalons kommt jetzt nicht zum Tragen. Das liegt daran, dass aus (6) die Ordnung  $z$  eliminiert wurde, die aber den wesentlichen Bestandteil dieser Beziehung darstellt (im Klammerterm ist  $r^2/2f^2 \ll 1$ ).

Zur genauen und absoluten Wellenlängenbestimmung muss der Etalon kalibriert werden, d.h. der Plattenabstand muss möglichst genau und die Ordnungen exakt bestimmt werden. Dazu werden mehrere sehr gut bekannte Wellenlängen herangezogen und die gemessenen Radien der Ringe einer bestimmten Ordnung mit Anfangswerten für  $d$  und  $z$  in (6) eingesetzt, so dass man ein Gleichungssystem für die verschiedenen Wellenlängen erhält. Bei der Auswertung werden dann die Anfangswerte für  $d$  und  $z$  variiert, bis das Gleichungssystem in sich die größte Übereinstimmung zeigt (Minimum für die Summe der Abweichungsquadrate).

Auflösungsvermögen des Fabry-Perot-Etalons

Die genaue Intensitätsverteilung in der Umgebung eines Interferenzmaximums in Abhängigkeit von der Phasengröße  $\phi$  hängt vom Transmissionsgrad  $T$  und Reflexionsgrad  $R$  der Platten ab und wird durch die *Airy-Formel* (*Sir George Bidell Airy*, 1801-1892; engl. Mathematiker und Astronom) beschrieben:

$$(9) \quad \frac{I}{I_0} = \left[ \frac{T}{1-R} \right]^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \phi \pi}$$

Daraus lässt sich die Halbwertsbreite  $2\Delta z$  der Interferenzmaxima bestimmen. Für kleine Winkel erhält man wiederum näherungsweise:

$$(10) \quad 2\Delta z = \frac{1-R}{\pi \sqrt{R}}$$

Bei einem Plattenabstand von 5 mm und einem Reflexionsgrad von etwa 92 % (Silberspiegel) ergibt sich  $2\Delta z = 0,026$ , also eine Breite von etwa 3 % des Ringabstands. Die dem Ordnungsabstand entsprechende Wellenlängendifferenz (freier Spektralbereich) ist durch (4) gegeben. Setzt man die volle Breite  $2\Delta z$  als Kriterium für das Auflösungsvermögen, so folgt:

$$(11) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} 0,026 = 0,0007 \text{ nm} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Linienbreite optischer Übergänge

In klassischer Betrachtung ist ein strahlendes Atom ein gedämpfter harmonischer Oszillator, der durch die Abstrahlung seine Energie laufend verliert. Das zugehörige Frequenzspektrum hat dann die Form einer Glockenkurve, deren Breite durch die Dämpfungskonstante (*Abklingkonstante*) bestimmt wird. Im quantenmechanischen Bild entspricht der Abklingkonstanten die *mittlere Lebensdauer* des Systems und die endliche Linienbreite erklärt sich aus der *Heisenbergschen Unschärferelation* (*Werner Heisenberg*, \*1901; dt. Physiker). Die Abklingkonstante optischer Übergänge liegt in der Größenordnung von  $10^{-8}$  s, woraus als natürliche Linienbreite ein Wert von etwa  $10^5$  nm folgt.

Unter realen Bedingungen werden die Linien durch eine Reihe von Einflüssen zusätzlich verbreitert. In einem Ensemble von Atomen werden durch Stöße untereinander oder mit Fremdatomen die mittleren Lebensdauern verkürzt (*Druckverbreiterung*). Wegen der thermischen Bewegung der Atome treten bei der Abstrahlung aufgrund des *Doppler-Effekts* (*Christian Doppler*, 1803 1853; östr. Physiker und Mathematiker) Linienverschiebungen auf, die wegen der statistischen Verteilung der Geschwindigkeit zu einer Verbreiterung führen (*Doppler-Verbreiterung*). Zusätzlich gibt es unter verschiedenen Bedingungen eine Reihe weiterer, komplizierter Wechselwirkungsprozesse, die Linienverbreiterungen verursachen können.

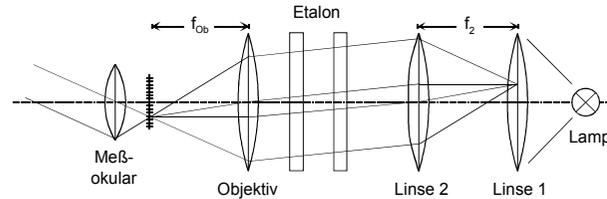
#### Apparatur und Geräte

Optische Bank (Dreikantschiene); Cd-Spektrallampe mit Netzgerät; Beleuchtungslinse, Kollimatorlinse, Irisblende, Fabry-Perot-Etalon, Objektiv, Meßokular. Farbfilter (rot, blau, grün)

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

##### Zu Aufgabe 1 (Aufbau und Justierung)

Der Strahlengang entspricht der folgenden Abbildung.



Die Beleuchtungslinse (Linse 1) entspricht dem Eintrittspalt konventioneller optischer Strahlengänge und erfüllt zwei Funktionen. Sie stellt zum einen eine von der Lampe gleichmäßig ausgeleuchtete Fläche als *sekundäre Flächenlichtquelle* dar, aus der mit Hilfe der Kollimatorlinse (Linse 2) Parallelstrahlenbündel unterschiedlicher Neigung erzeugt werden. Zum anderen wird mit Linse 1 die Lampe in etwa in den Etalon abgebildet und so eine hohe Intensität des Interferenzdiagramms erreicht. Zusätzlich ist eine Irisblende vorhanden, mit der die Strahlen zur Verbesserung der Abbildung auf den achsennahen Bereich eingegrenzt werden können.

Das Objektiv bildet das Interferenzdiagramm in die Beobachtungsebene eines Messokulars ab (Okularmikrometer), wo die Durchmesser der Interferenzringe direkt gemessen werden können.

Die Justierung des Strahlenganges ist insgesamt unkritisch. Wichtig sind eine sorgfältige Fokussierung des Beugungsdiagramms, die wegen der unscharfen Intensitätsverteilung des Beugungsdiagramms subjektiv schwierig ist, und eine korrekte Höhenjustierung zur Zentrierung des Messokulars auf das Ringsystems.

Zur Vorselektion der zu untersuchenden Linien des Cd-Spektrums sind Farbfilter vorhanden.

##### Zu Aufgabe 2 (Plattenabstand) und 3 (Wellenlängen der grünen und blauen Linien)

Bei dem eingeschalteten Farbfilter werden die Positionen der links- und rechtsseitigen Ringe mit abnehmender Interferenzordnung ausgemessen. Die Beobachtung der Interferenzdiagramme der grünen und der blauen Linie ist wegen einer nicht einwandfreien Vorselektion durch die Farbfilter physiologisch nicht unproblematisch und bedarf einiger Gewöhnung.

Zur Auswertung werden nach (7) bzw. (8) die Quadrate der Radien gegen die Laufzahl aufgetragen. Aus den Anstiegen der erwarteten Geraden können für die "bekannte" rote Linie der Plattenabstand und danach für die grüne und die blaue Linie die Wellenlängen bestimmt werden.

##### Zu Aufgabe 4 (Linienbreite)

Die Linienbreite der Strahlung (der roten Linie) kann wegen des nichtlinearen Ansprechvermögens des Auges nur abgeschätzt werden. Die Messung wird ebenfalls nach (8) ausgewertet und das Ergebnis mit der instrumentellen Linienbreite nach (10) verglichen und diskutiert, wobei der Reflexionsgrad  $R$  des vorhandenen Etalons mit 80 % angenommen werden soll.

Welchen zusätzlichen experimentellen Einfluss gibt es auf die beobachtete Linienbreite?

SPEZIFISCHE LADUNG $e/m_0$ DES ELEKTRONS
---

GP II
-------

Stichworte

Spezifische Ladung und Ladungsquantelung. Lorentz-Kraft. Kreisbewegungen.

Ziele des Versuchs

Exemplarischer Versuch zur atomistischen Struktur der Elektrizität und zu Meßmethoden durch Ablenkung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern.

Literatur

[1]: Kapitel 8.1.1, 8.2

[3]: Kapitel 3.4.4, 7.1.2, 11.1.7, 11.1.4, 11.3.5

Geiger, Scheel; Handbuch der Physik XXII. (Historische, vertiefende Anmerkungen)

Aufgabe

Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons  $e/m_0$  durch Messung der magnetischen Ablenkung von Elektronen in einem Fadenstrahlrohr.

Physikalische Grundlagen

Zu Beginn des vorigen Jahrhunderts zeigten sich in den Ergebnissen der physikalischen Arbeiten deutliche Anzeichen einer *korpuskularen Natur* der elektrischen Ladung. Die *Faradayschen Experimente* (Michael Faraday, 1791-1867; engl. Physiker und Chemiker) und die Gesetze der Elektrolyse ergaben ein festes Verhältnis zwischen der Elektrizitätsmenge und der Masse als Träger der Elektrizität und ließen, zusammen mit der Vorstellung einer atomistischen Struktur der Materie, den Schluss auf die gequantelte Natur der Ladung zu. *Helmholtz* (Hermann von Helmholtz, 1821-1894; dt. Physiker und Physiologe) spricht in einer *Faraday-Gedächtnisrede* 1881 von der "*elektrischen Ladung des Ions*" und sagt "*Genau dieselbe bestimmte Menge, sei es positiver, sei es negativer Elektrizität, bewegt sich mit jedem einwertigen Ion oder mit jedem*

*Valenzwert eines mehrwertigen Ions, und begleitet es unzertrennlich bei allen Bewegungen, die dasselbe durch die Flüssigkeit macht. Auf die elektrischen Vorgänge übertragen, führt diese Hypothese in Verbindung mit Faradays Gesetz allerdings auf eine etwas überraschende Folgerung. Wenn wir Atome der chemischen Elemente annehmen, so können wir nicht umhin, weiter zu schließen, dass auch die Elektrizität, positive sowohl wie negative, in bestimmte elementare Quanten geteilt ist, die sich wie Atome der Elektrizität verhalten.*" Die elektrolytischen Messungen lieferten jedoch nur molbezogene Werte für Ionen, so dass die Bestimmung der spezifischen Ladung und der Ionenladung selbst die Kenntnis der Loschmidtschen Zahl voraussetzte.

Die Geschichte der Entdeckung des Elektrons begann um 1860 mit der Untersuchung von Gasentladungen und der Entdeckung der Kathodenstrahlen durch *Plücker* 1859 (Julius Plücker, 1801-1868; dt. Physiker und Mathematiker). *Hittorf* (Johann Wilhelm Hittorf, 1824-1914; dt. Physiker und Chemiker) fand 1869 die magnetische und *Goldstein* (Eugen Goldstein, 1850-1930; dt. Physiker) 1876 die elektrische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen, wobei *Hittorf* bereits negativ geladene Teilchen als deren eigentliche physikalische Natur vermutete. *Schuster* (K. Schuster, \*1903), *Thomson* (Sir Joseph John Thomson, 1856-1940; engl. Physiker) und *Wiechert* (Emil Wiechert, 1861-1928; dt. Geophysiker) führten ab etwa 1890 erste Messungen der spezifischen Ladung in unterschiedlichen Ablenkversuchen durch. Auch wenn die frühen Ergebnisse dieser Messungen noch stark verfälscht waren, so zeigten sie, dass "*die Masse der Kathodenstrahlen noch etwa 2000 mal kleiner als die der leichtesten Ionen sein müsste.*" Umfangreiche Messungen der Geschwindigkeit (*Thomson*) und Untersuchungen der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse und die Übereinstimmung der spezifischen Ladung der Kathodenstrahlen mit der von photoelektrisch oder thermisch ausgelösten Elektronen ließen dann zu Ende des vorigen Jahrhunderts die Existenz des Elektrons als gesichert erscheinen, als deren klassischer Entdecker *Thomson* genannt wird.

Zu Beginn dieses Jahrhunderts wurde dann der Wert der Elektronenladung selbst gemessen (*Millikan* 1910-1925; siehe *MILLIKAN-VERSUCH* in dieser Praktikumsanleitung) und, insbesondere durch Bestimmung

der spezifischen Ladung aus dem *Zeeman-Effekt* (*Pieter Zeeman*; 1865-1943; nld. Physiker) und aus der *Rydberg-Konstanten* (*Johannes Rydberg*; 1854-1919; schwed. Physiker; siehe Versuche *ZEEMAN-EFFEKT* und *OPTISCHE SPEKTROSKOPIE* in dieser Praktikumsanleitung), die Identität zwischen den freien Elektronen und den gebundenen Elektronen als Bauteile des Atoms nachgewiesen.

Heute "gültige" Werte dieser Daten für das Elektron sind (*W. Bendel*, A 1975 Least-Squares Adjustment of Values of the Fundamental Constants, Naval Research Laboratory Memorandum; Report 3213, January 1976):

$$(1a) \quad e/m_0 = 1,7588115(24) \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$$

$$(1b) \quad e = 1,6021829(22) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$(1c) \quad m_0 = 9.1094634(99) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Interpretiert man die gesamte Ruhemasse des Elektrons entsprechend der *Einsteinschen Beziehung* ( $E=mc^2$ ) als den elektrostatischen Energieinhalt einer kugelschalenförmigen Ladungsverteilung mit dem Radius  $r$ , so folgt:

$$(2) \quad m_0 c^2 = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 r}$$

( $E = CU^2/2$  mit  $C = 4\pi\epsilon_0 r$ ). Durch Auflösen erhält man  $r = 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Dieser Wert gibt zumindest die Größenordnung des Elektronenradius richtig wieder, wie durch Streuexperimente belegt wird, auch wenn es aus Sicht der Quantenphysik grundsätzlich unzutreffend ist, das Elektron mit klassischen Vorstellungen beschreiben oder erklären zu wollen. In der Literatur ist es üblich, den doppelten Wert von (2) als *klassischen Elektronenradius* zu bezeichnen:

$$(3) \quad r_0 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m_0 c^2} = 2,8179378(70) \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Meßmethode

Auf bewegte Ladungsträger wirkt in einem Magnetfeld  $B$  die *Lorentzkraft* (*Hendrik Antoon Lorentz*; 1853-1928; nld. Physiker):

$$(4) \quad F_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

wenn  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist. Die *Lorentzkraft* wirkt immer senkrecht zu  $\mathbf{v}$ , sie ändert damit die Richtung der Geschwindigkeit, nicht aber deren Betrag. Für ein homogenes und konstantes Magnetfeld, und für Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit folgt eine konstante Richtungsänderung, d.h. als Bahn der Bewegung ein Kreis. Für ein (punktförmiges) Elektron mit  $q = -e$  lautet die Bewegungsgleichung:

$$(5) \quad -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = m \dot{\mathbf{v}}$$

Für ein konstantes Magnetfeld in  $z$ -Richtung mit  $\mathbf{B} = (0/0/B)$  folgt für die Komponenten der Bewegungsgleichung:

$$(6) \quad \begin{cases} e B v_x = m \dot{v}_y \\ -e B v_y = m \dot{v}_x \\ 0 = \dot{v}_z \end{cases}$$

Der spezielle Ansatz

$$(7) \quad \begin{cases} v_x = -v \sin \omega t \\ v_y = -v \cos \omega t \\ v_z = 0 \end{cases}$$

löst das Differentialgleichungssystem (6) und führt durch Einsetzen auf die Bedingung ( $m=m_0$ ):

$$(8) \quad \omega = \frac{e}{m} B$$

Die *Präzessionsfrequenz* (8) eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld wird als *Larmorfrequenz* (*Sir Joseph Larmor*, 1857-1942; brit. Physiker) bezeichnet; sie hat Bedeutung in der Atom- und Kernphysik. Mit  $\omega = v/r$  ergibt sich für die spezifische Ladung:

$$(9) \quad \frac{e}{m} = \frac{v}{r B} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{e}{m}\right)^2 = \frac{v^2}{r^2 B^2}$$

wobei  $r$  der Radius der Kreisbahn ist.

Beschleunigt man Elektronen durch eine elektrische Spannung  $U$ , so kann deren Geschwindigkeit aus der Energie hergeleitet werden:

$$(10) \quad e U = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{bzw.} \quad v^2 = 2 U \frac{e}{m}$$

in (8) eingesetzt erhält man:

$$(11) \quad \frac{e}{m} = \frac{2 U}{r^2 B^2}$$

#### Fadenstrahlrohr

Die Erzeugung, Beschleunigung und Untersuchung der Bewegung der Elektronen geschieht in einem *Fadenstrahlrohr*. In einem Elektrodensystem werden freie Elektronen an einer Glühkathode erzeugt und durch eine zwischen Anode und Kathode liegende Spannung (70-300 V) beschleunigt. Zwischen Anode und Kathode ist im Allgemeinen eine weitere Fokussierelektrode angeordnet (Gitter, *Wehneltzylinder*, *Arthur Rudolph Wehnelt*, 1871-1944; dt. Physiker). Durch eine kleine Öffnung in der Anode tritt der Elektronenstrahl in den elektrisch feldfreien Raum aus.

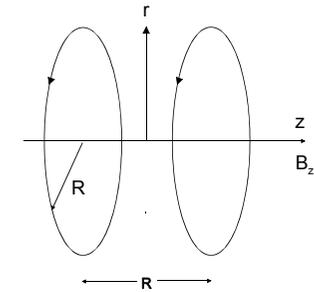
Durch ein senkrecht zur Strahlrichtung angelegtes homogenes Magnetfeld kann die Bahn der Elektronen kreisförmig gekrümmt werden. Das kugelförmige Fadenstrahlrohr ist mit Wasserstoff gefüllt (etwa 1 Pa), so dass durch vereinzelte Stöße mit den Elektronen Wasserstoffmoleküle optisch angeregt werden. Durch die anschließende Lichtemission wird so die Bahn der Elektronen sichtbar gemacht.

Dass die Elektronen nach Austritt in den feldfreien Raum durch die gegenseitige elektrostatische Abstoßung nicht aufgefächert werden, hängt mit der fokussierenden Wirkung der beim Zusammenstoß mit den Wasserstoffmolekülen entstehenden Raumladungen zusammen (Fadenstrahlen).

#### Helmholtz-Spulen

Über einen größeren Bereich homogene und allseits zugängliche Magnetfelder mäßiger Stärke lassen sich mit *Helmholtz-Spulen* erzeugen. Sie bestehen aus einem Paar Spulen, die einander parallel und koaxial im Abstand ihres Radius  $R$  gegenüberstehen. Für ein

Windungspaar ergibt sich als Magnetfeld im Mittelpunkt der Anordnung (siehe Abbildung auf der folgenden Seite):



$$(12) \quad B_0 = \mu_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{I}{R}$$

Für Punkte mit den Koordinaten  $z$  und  $r$  (siehe Abbildung)) ergeben sich als axiale und radiale Feldkomponente:

$$(13) \quad B_z = B_0 \left\{ 1 - \frac{48}{125} \left[ 3 \frac{r^4}{R^4} - 24 \frac{r^2}{R^2} \frac{z^2}{R^2} + 8 \frac{z^4}{R^4} \right] + \dots \right\}$$

$$(14) \quad B_r = B_0 \left\{ \frac{72}{125} \frac{r}{R} \frac{z}{R} \left[ 4 \frac{z^2}{R^2} - 3 \frac{r^2}{R^2} \right] + \dots \right\}$$

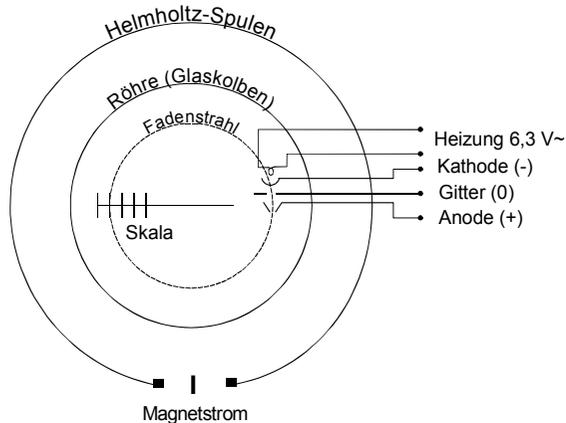
#### Apparatur und Geräte

Fadenstrahlrohr; Betriebsgerät mit regelbarer Anodenspannung und weiteren Hilfsspannungen. *Helmholtz-Spulen*; Netzgerät für Feldstrom. Multimeter für Beschleunigungsspannung und Feldstrom.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Abbildung auf der folgenden Seite zeigt das Prinzipschaltbild des Fadenstrahlrohrs. Zur Spannungs- und Stromversorgung der Röhre ist ein besonderes Betriebsgerät vorhanden. Der Anschluss des Fadenstrahlrohrs geht aus den Bezeichnungen am Betriebsgerät und am Anschluss-Stutzen der Röhre hervor.

Zwischen Kathode und Anode ist eine als Gitter bezeichnete Fokussierelektrode zwischengeschaltet. Als Beschleunigungsspannung ist jedoch die Gesamtspannung zwischen Kathode und Anode wirksam.



**Achtung: Bei Inbetriebnahme der Röhre ist die genaue Betriebsanleitung im Platzskript zu beachten!**

Zur Einstellung der Elektronenbahndurchmesser sind innerhalb der Röhre kurze Drahtstifte angebracht. Die durch diese Stifte vorgegebenen Durchmesser sind im Platzskript angegeben.

Zur Stromversorgung der *Helmholtz-Spulen* steht ein Netzgerät zur Verfügung. Bei der Schaltung des Stromkreises ist darauf zu achten, dass beide Spulen eigene Anschlüsse besitzen, und dass die Spulen hintereinander geschaltet werden müssen. Die Daten der Spulen (Radius, Windungszahl) sind ebenfalls im Platzskript angegeben. Die Messung der Beschleunigungsspannung  $U$  und des Magnetstroms  $I$  erfolgt mit zwei Digitalmultimetern.

Die Messungen werden für die drei größten Bahnradien durchgeführt. Zur Auswertung wird die Spannung  $U$  gegen das Quadrat des Stromes  $I^2$  aufgetragen. Aus den Anstiegen der Geraden ergibt sich die spezifische Ladung des Elektrons. Es ist ein Endergebnis (gewichteter Mittelwert) aus den drei Messreihen anzugeben.

### Ergänzende Fragen

Der Versuch wird mit Elektronen aus einer Glühemission durchgeführt. Mit welchen Anfangsenergien der Elektronen muss gerechnet werden? Wie wird das Messergebnis beeinflusst?

Wie groß ist die lineare Geschwindigkeit der austretenden Elektronen? Muss eine relativistische Korrektur berücksichtigt werden?

## MILLIKAN-VERSUCH

## GP II

Themen und Begriffe

Ladungsquantelung, Elementarladung. *Coulomb-Kraft*, *Stokessches Gesetz*.

Ziele des Versuchs

Einfacher und exemplarischer Versuch zum Nachweis und zur Messung gequantelter Größen.

Literatur

[3]: Kapitel 7.1.2

Aufgabe

Bestimmung der Elementarladung aus der Messung der Fall- und Steigzeiten geladener Öltröpfchen verschiedener Größe unter Berücksichtigung einer radiusabhängigen Korrektur.

Physikalische GrundlagenLadungsquantelung

Nach der Entdeckung der elektrischen Phänomene begann in der Mitte des 18. Jhd. die wissenschaftliche Fragestellung nach der Natur der Elektrizität. Vorherrschend zu dieser Zeit waren *Fluidatheorien*, obwohl es auch Vertreter eines mehr einfacheren, mechanischen Weltbildes gab, wie z.B. *Franklin* (*Benjamin Franklin*; 1706-1790; am. Politiker, Schriftsteller und Naturwissenschaftler), die sich Elektrizität aus feinen Teilchen bestehend vorstellten, die sich durch Materie ungehemmt hindurch bewegen können.

Bereits 1833 entdeckte *Faraday* (*Michael Faraday*; 1791-1867; engl. Physiker und Chemiker) mit seinen Gesetzen zur Elektrolyse erste experimentelle Anzeichen der Atomistik in der Elektrizität, ohne dass er jedoch, oder die Physiker seiner Zeit, die Quantelung der Ladung auch erkannten. Erst in den 70er und 80er Jahren des vergangenen Jahrhunderts schlossen *Stoney* (*George Johnstone Stoney*; 1826-1911; engl. Physiker) und *Helmholtz* (*Hermann von Helmholtz*;

1821-1894; dt. Physiker und Physiologe) in aller Deutlichkeit, dass "*Elektrizität in bestimmte, elementare Quanten geteilt ist, die sich wie Atome der Elektrizität verhalten*".

Die elektrolytischen Messungen lieferten nur massenbezogene Werte wie  $e_0/m_i$  bzw.  $L \cdot e_0$  (Elementarquantum der Ladung  $e_0$ , Ionenmasse  $m_i$ , *Avogadro'sche Konstante*  $L$ ). Erste Werte der Ionenladung wurden daraus ermittelt, indem man in unabhängigen Experimenten die Konstante  $L$  bestimmte. Da diese Messungen jedoch Schwierigkeiten mit sich brachten, wurden Experimente konzipiert, bei denen die Zahl der Ladungsträger direkt gezählt werden konnte. Als Ladungsträger wurden sowohl einzelne Atomionen selbst ( $\alpha$ -Teilchen) als auch an Flüssigkeitströpfchen angelagerte Ionen herangezogen (Ionennebelmethoden). Zusätzlich gab es unabhängige Versuche der Bestimmung der Ionenladung aus Daten des radioaktiven Zerfalls.

Die Weiterentwicklung der Nebel- und Tröpfchenmethoden führte zu Beginn unseres Jahrhunderts zu Ladungsmessungen an einzelnen, isolierten Teilchen. Die führenden Arbeitsgruppen waren die von *F. Ehrenhaft* (*Felix Ehrenhaft*; 1879-1952; östr. Physiker) in Wien und *R. A. Millikan* (*Robert Andrews Millikan*; 1868-1953; am. Physiker) in Chicago. In beiden Gruppen wurde ab 1910 mit der dann unverändert gebliebenen und im folgenden beschriebenen Methode gearbeitet, wobei die zwei erforderlichen Messungen (im feldfreien Raum und unter Einwirkung eines elektrischen Feldes) an ein und demselben Teilchen durchgeführt wurden.

Während *Millikan* die Elementarladung qualitativ und quantitativ nachzuweisen trachtete, war *Ehrenhaft* von der Vorstellung eines Elementarquantums nicht überzeugt, und Ziel seiner Arbeit war es, diese zu widerlegen. *Millikan* veröffentlichte seine wesentlichen Arbeiten 1911 und 1913, arbeitete jedoch bis in die Mitte der 20er Jahre an einer systematischen Verbesserung seiner Ergebnisse weiter. *Millikans* letzter, 1925 veröffentlichter Wert lautet (umgerechnet in SI-Einheiten):

$$(1) \quad e_0 = 1,5924(17) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Die Bedeutung der *Millikanschen* Arbeit liegt in einem direkten und einfachen qualitativen und quantitativen

Nachweis der Quantelung der Ladung. Für diese Messungen und für die experimentelle Bestätigung der Einsteinschen Gleichung  $E = h \cdot \nu$  erhielt er 1923 den Nobelpreis für Physik.

An der Existenz der Elementarladung kann heute nicht mehr gezweifelt werden, auch wenn es Überlegungen gibt, grundlegende Elementarteilchen mit der Ladung  $1/3 e_0$  und  $2/3 e_0$  anzunehmen (Quarks). Die Elementarladung scheint darüber hinaus für alle bekannten Elementarteilchen betragsmäßig gleich zu sein, für Elektronen und Protonen wurde die relative Differenz experimentell auf kleiner als  $10^{-20}$  eingeschränkt. Heutzutage wird die Elementarladung indirekt aus anderen experimentellen Daten gewonnen, ein 1975 ermittelter Bestwert beträgt (*W. Bendel*; A 1975 Least Squares Adjustment of Values of the Fundamental Constants; Naval Research Laboratory Memorandum Report 3213; January 1976

$$(1a) \quad e_0 = 1,6021829(22) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Meßmethode

Auf einen kugelförmigen, geladenen Körper (hier kleine Öltröpfchen) wirken in einem vertikalen homogenen und konstanten elektrischen Feld und innerhalb eines homogenen Mediums vier Kräfte: die Schwerkraft  $F_G$ , der Auftrieb  $F_A$ , die *Coulombkraft*  $F_C$  (*Charles Augustin de Coulomb*; 1736-1806; frz. Physiker) und eine Reibungskraft  $F_R$ . Laminare Strömungsverhältnisse vorausgesetzt ergibt sich die Reibungskraft nach dem *Stokesschem Gesetz* (*Sir George Gabriel Stokes*; 1819-1903; engl. Mathematiker und Physiker):

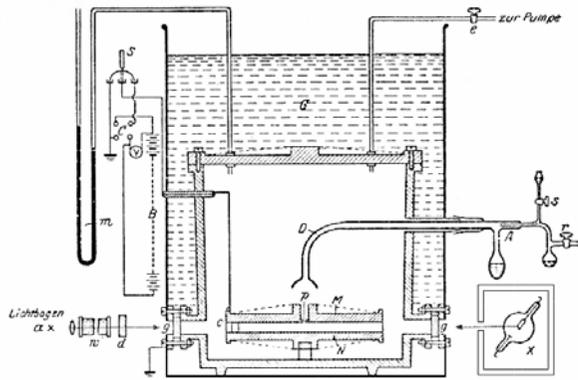
$$(2) \quad F_R = -6 \pi \eta r v$$

wobei  $\eta$  die Viskosität,  $r$  der Radius des Tröpfchens und  $v$  dessen Geschwindigkeit sind. Wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit kompensiert die Reibungskraft nach hinreichender Zeit die anderen Kräfte, und man beobachtet eine kräftefreie, gleichförmige Bewegung. Aus der Geschwindigkeit eines im feldfreien Raum fallenden Tröpfchens kann dann dessen Radius berechnet werden.

Legt man nun ein elektrisches Feld so an (z.B. mit Hilfe zweier Kondensatorplatten), dass das Tröpfchen steigt, so kann aus der Steiggeschwindigkeit und aus

dem Radius die Ladung  $q$  des Tröpfchens berechnet werden.

Die experimentelle Anordnung besteht aus einem Plattenkondensator, einem Zerstäuber zur Erzeugung feiner Öltröpfchen, einer Beleuchtungseinrichtung und einem Messmikroskop zur Beobachtung der Tröpfchen (siehe Abbildung).



R. A. MILLIKAN endgültige Versuchsanordnung. MN Kondensator. AD Zerstäuber. G Ölbad. a und g Beleuchtung des Teilchens.

Die durch Zerstäuben erzeugten Flüssigkeitströpfchen sind zum größten Teil durch reibungselektrische Effekte elektrisch geladen. Bei den Messungen zeigt sich, dass die ermittelten Ladungswerte kleine Vielfache einer kleinsten vorkommenden Ladungsgröße sind, woraus auf die gequantelte Struktur der Ladung geschlossen und die Elementarladung bestimmt werden kann:

$$(3) \quad q = n \cdot e_0$$

Um die Elementarladung als kleinstes gemeinsames, ganzzahlig Vielfaches  $n$  der gemessenen Ladungswerte ermitteln zu können, müssen eine ausreichende Anzahl verschiedener und hinsichtlich der Messgenauigkeit bzw. des Auflösungsvermögens hinreichend kleiner Ladungswerte gemessen werden (der Fehler bzw. das Auflösungsvermögen der Messung müssen zumindest klein gegen  $e_0$  sein).

Millikan selbst hat hauptsächlich die Umladung von Tröpfchen gemessen, die durch Lichteinstrahlung über

den Photoeffekt bewirkt wurden. Eine andere Möglichkeit von Umladungen ergibt sich durch Anlagerung von Gasionen, die als Fehlerquelle bei Messungen auftreten können. Der Vorgang kann daran erkannt werden, dass sich die Geschwindigkeit eines Tröpfchens im elektrischen Feld sprunghaft ändert.

Korrektur der Stokesschen Formel

Aus Millikans Messungen ergab sich, dass das Ladungsquantum für ein Tröpfchen immer konstant, für unterschiedliche Tröpfchen aber verschieden groß war. Die Systematik zeigte Abweichungen bei kleinen Tröpfchen. Man schloss daraus, dass die Annahme des Stokesschen Gesetzes in seiner einfachen Form (2) falsch sein musste. Die Grundvoraussetzung der Homogenität des umgebenden Mediums ist gerade bei kleinen Tröpfchen nicht gut erfüllt. Bei Atmosphärendruck ist der Radius  $r$  der Teilchen nicht mehr vernachlässigbar groß gegen die freie Weglänge der Gasmoleküle. Unter der Berücksichtigung einer von Cunningham (E. Cunningham; engl. Mathematiker) berechneten sogenannten kinetischen Korrektur lautet die Reibungskraft:

$$(4) \quad F_R = \frac{-6 \pi \eta r v}{1 + A \frac{\lambda}{r}}$$

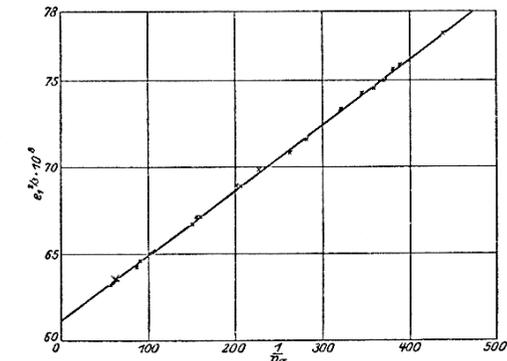
Millikan hat ein grafisches Verfahren zur Berücksichtigung dieser Korrektur erdacht, da ein genauer Wert der Konstanten  $A$  ( $A \approx 0,85$ ) nicht bekannt war. Berechnet man mit dem Ansatz (4) den korrekten Wert für die Elementarladung  $e_0$  aus den Kräftebilanzen im freien Fall (zur Bestimmung des Radius) und beim Aufsteigen unter Einfluss des elektrischen Feldes, so erhält man einen Ausdruck, der den unkorrigierten Wert  $e$  darstellt geteilt durch den Korrekturfaktor  $(1 + A/r)^{3/2}$ , d.h.:

$$(5) \quad e_0 = \frac{e}{\left(1 + A \frac{\lambda}{r}\right)^{3/2}}$$

oder

$$(6) \quad e^{2/3} = e_0^{2/3} \left(1 + A \frac{\lambda}{r}\right)$$

Trägt man die aus Tröpfchen mit verschiedenem Radius  $r$  gewonnenen Werte von  $e$  gegen  $1/r$  auf, so sollte sich ein linearer Zusammenhang ergeben, aus dessen Achsenabschnitt ein korrigierter Wert  $e_0$  abgelesen werden kann (Extrapolation auf  $1/r \rightarrow 0$  bzw.  $r \rightarrow \infty$ ).



(Eine Serie aus MILLIKANS endgültigen Messungen; empirische Korrektur der Abhängigkeit vom Teilradius. Ölteilchen in Luft.)

Dies Verfahren stellt eine Näherung dar, da die Korrektur auch bei  $r$  berücksichtigt werden müsste. Anhand der Auswertergebnisse muss entschieden werden, ob ein entsprechender zweiter Korrekturschritt erforderlich ist.

Apparatur und Geräte

Sogenannte Millikan-Apparaturen (Plattenkondensator, Öizerstäuber, Beobachtungsmikroskop). Betriebsgerät mit Voltmeter. Zwei Additions-Handstoppuhren.

Versuchsdurchführung und Auswertung

Apparaturen

Es gibt (drei) Apparaturen auf verchromter Stativstange (LEYBOLD-Apparaturen), die sehr einfach und übersichtlich im Aufbau sind, aber nur Messungen mit knapp ausreichender Genauigkeit und Auflösung erlauben. An einem großen, runden Plattenkondensator sind seitlich ein Zerstäuber zur Erzeugung von Öltröpf-

chen, ein Mikroskop und eine Beleuchtungseinrichtung (Lampe) angebracht. In einem kleinen Netzgerät befindet sich die Spannungsversorgung. Die Fall- und Steigzeiten der Tröpfchen werden mit zwei Handstoppuhren (Additionsstoppuhren) gemessen. Die Messungen sind subjektiv schwierig, und das Suchen der Tröpfchen und das Verfolgen der Auf- und Abbewegung mit dem Mikroskop sind ermüdend für die Augen. Meist gelingt es erst nach einigen Zerstäubungsversuchen ein geeignetes Tröpfchen (s.u.) aufzufinden.

Zusätzlich ist eine Apparatur des Herstellers *Pasco-Scientific* vorhanden, die deutlich bessere Messungen zulässt.

#### Tröpfchenerzeugung und Auswahl

Aus dem Zerstäubernebel müssen Tröpfchen geeigneter Ladung und Größe herausgesucht werden. Große Tröpfchen tragen im Allgemeinen eine hohe Ladung und sind daher zur Erkennung der Quantelung und Bestimmung der Elementarladung ungeeignet. Große Tröpfchen können an einer großen Fallgeschwindigkeit ohne elektrisches Feld erkannt werden.

Wegen der Seitenumkehr des Mikroskops "steigen" im feldfreien Raum fallende Tröpfchen bei der Betrachtung. Bei Einschalten der Spannung müssen sie ihre Bewegungsrichtung umkehren. Bei den *LEYBOLD-Apparaturen* müssen von diesen Tröpfchen solche ausgewählt werden, deren Fallgeschwindigkeit höchstens 0,5-1 Skt/s beträgt. Dies macht unter Umständen Mühe, da die Zerstäuber überwiegend größere Tröpfchen liefern. Nähere Hinweise sind im Platzskript angegeben.

Zur Auswertung der Messungen unter Berücksichtigung der radiusabhängigen Korrektur nach Gleichung (6) sind Messdaten für Tröpfchen mit verschiedenem Radius erforderlich.

#### Messungen

Die Messung besteht darin, Fall- und Steigzeiten von Tröpfchen für eine vorgegebene Mess-Strecke zu messen, wobei die Durchführung der Messungen Gesichtspunkte der erforderlichen Genauigkeit und Möglichkeiten der Überprüfbarkeit und Reproduzierbarkeit berücksichtigen muss.

Von den zur Auswertung benötigten Daten trägt die Kondensatorspannung den größten und damit bestimmenden Fehler bei. Die Spannung ist regelbar und wird mit einem Instrument der Güteklasse 2,5 gemessen. Die Zeitmessungen sollten so angelegt sein, dass sie den Gesamtfehler nicht wesentlich vergrößern.

Zur Verbesserung der Genauigkeit, zur Kontrolle des Fehlers und zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit müssen die Fall- und Steigzeiten eines Tröpfchens wiederholt gemessen werden. Für die Spannung muss hinsichtlich der Fehler ein Kompromiss gewählt werden. Eine große Spannung ergibt einen kleinen (relativen) Spannungsfehler, wegen der kürzeren Steigzeit aber einen größeren Zeitfehler, und umgekehrt.

## FRANCK-HERTZ-VERSUCH

## GP II

Stichworte

Atommodell; Struktur der Elektronenhülle, Quantenzahlen, Terminologie. Zustände (Energieniveaus), Termschema; Übergänge. Elektronenstoßanregung.

Ziele des Versuchs

Historisch bedeutsamer und exemplarischer Versuch zum grundsätzlichen Nachweis der diskreten Struktur atomarer Anregungszustände.

Literatur

[1]: Kapitel 12.4, 13.2.3

[5]: Kapitel 4.5

Aufgaben

1. Beobachtung der Elektronenstoß-Anregungskurve (Franck-Hertz-Kurve) von Quecksilber bei einer (Ofen-) Temperatur von etwa 190 °C mit dem Oszilloskop. Optimierung der Kurve durch geeignete Einstellung der experimentellen Parameter (Ofenheizung, Kathodenheizung, Beschleunigungsspannung).
2. Quantitative Aufnahme der Kurve mit einem X-Y-Schreiber. Bestimmung der zugehörigen Übergangsenergie in Quecksilber. Berechnung der Wellenlänge und der Frequenz des Überganges.
3. Beobachtung und Registrierung weiterer Anregungskurven für Temperaturen von 150 und 210 °C. Qualitative Diskussion der Ergebnisse.
4. Aufnahme und Auswertung einer Franck-Hertz-Kurve für Neon bei Zimmertemperatur.

Physikalische Grundlagen

Ab 1911 führten *James Franck* (1882-1964; dt. Physiker) und *Gustav Hertz* (\*1887; dt. Physiker) Versuche zur Untersuchung der Wechselwirkung von Elektronen

mit Gasmolekülen durch, bei denen es ihnen 1913 gelang, die Existenz diskreter Anregungsstufen in Quecksilber nachzuweisen, und die eine glänzende Bestätigung der Quantenhypothesen und des *Bohr-Sommerfeldschen-Atommodells* (*Niels Bohr*, 1885-1962; dän. Physiker; *Arnold Sommerfeld*, 1868-1951; dt. Physiker) darstellten.

Die Apparatur war an Vorbilder von *Lenard* (*Philipp Lenard*, 1862-1947; dt. Physiker) angelehnt. Innerhalb einer mit Quecksilberdampf gefüllten Röhre gehen von einer Glühkathode Elektronen aus, die durch eine Spannung zu einem Gitter hin beschleunigt werden (Beschleunigungsspannung bis etwa 100 V). Hinter dem Gitter ist eine Auffangelektrode mit einer kleinen Gegenspannung ( $\approx 1\text{V}$ ) gegenüber dem Gitter angeordnet.

Bei Beschleunigung der Elektronen mit zunehmender Spannung erfolgen zunächst nur elastische Stöße der Elektronen mit den Quecksilberatomen. Im Auffängerkreis kann dabei ein gleichfalls zunehmender Strom beobachtet werden. Sobald die Beschleunigungsspannung jedoch einen bestimmten Schwellwert bzw. ein ganzzahlig Vielfaches davon erreicht, bricht der Strom steil ab, um danach jeweils wieder anzusteigen.

Die im Praktikum am Versuchsort vorhandene Röhre besitzt eine indirekt geheizte Bariumoxidkathode, eine netzförmige Anode und eine Auffängerelektrode. Die Elektroden sind planparallel angeordnet. Um eine hohe Stoßwahrscheinlichkeit zu erreichen, ist der Abstand zwischen Kathode und Anode groß gegen die jeweilige mittlere freie Weglänge. Der Abstand zwischen Anode und Auffängerelektrode dagegen ist klein verglichen mit der freien Weglänge.

Die Hg-Röhre ist in einem Ofen montiert, der durch eine Heizwendel über einem Stelltransformator regelbar beheizt werden kann. Der Dampfdruck des Quecksilbers bei einer Temperatur von 190 °C beträgt etwa 25 hPa.

Apparatur und Geräte

Franck-Hertz-Röhre mit Quecksilberfüllung in Ofen; Franck-Hertz-Röhre mit Neonfüllung.

Betriebsgerät. Netzgerät für eine zusätzliche Hilfsspannung. Stelltransformator für Ofenheizung.

Oszilloskop. Multimeter. X-Y-Schreiber. Verbindungskabel.

Versuchsdurchführung und AuswertungAllgemeine Hinweise

Zur Spannungsversorgung der Röhren (Hg und Ne) ist ein spezielles Betriebsgerät vorhanden. Der Anschluss und die Inbetriebnahme der Röhren erfolgt gemäß den nachfolgenden Hinweisen zu den Aufgabenstellungen.

Das Betriebsgerät enthält einen Messverstärker hoher Empfindlichkeit zur Verstärkung des Auffängerstromes, der am Verstärkerausgang in willkürlichen Einheiten als Spannung nachgewiesen werden kann. Der Verstärkungsfaktor und der Nullpunkt können mit Drehreglern eingestellt werden. Eine Gegenspannung von 1,5 V zwischen Anode und Auffängerelektrode ist fest innerhalb des Gerätes installiert.

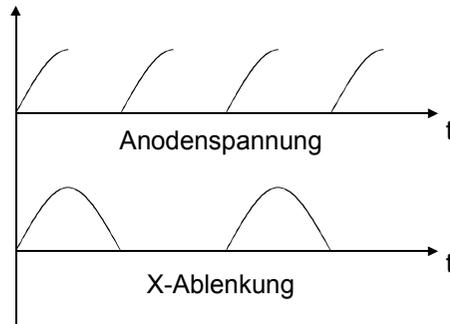
Das Netzgerät ermöglicht einen statischen Betrieb (-) zum punktuellen (Multimeter) oder kontinuierlichen, langsamen Ausmessen der Kurve (Schreiber) und einen dynamischen Betrieb ( $\sphericalangle$ ) zur periodischen Anregung und Beobachtung der Kurven mit dem Oszilloskop.

Dynamischer Betrieb

Im dynamischen Betrieb ( $\sphericalangle$ ) wird die Anodenspannung periodisch von 0 bis zu dem am Drehregler eingestellten Maximalwert durchgefahren. Legt man die Anodenspannung an die X-Ablenkung und den Ausgang des Messverstärkers an die Y-Ablenkung eines Oszilloskops, so kann die gesamte Anregungskurve als stehendes Bild auf dem Bildschirm beobachtet werden. Für den Anschluss an das Oszilloskop sind zwei 4-mm-Buchsen an dem Betriebsgerät vorhanden (X und Y).

(Die Spannung am Ausgang "X-Ablenkung" des Betriebsgeräts ist nicht identisch mit der Anodenspannung. Sie hat zwar den gleichen zeitlichen Verlauf, ist aber unabhängig von  $U$  und lässt sich mit dem Drehknopf "X-Ablenkung" getrennt einstellen. Das hat den Vorteil, dass bei einer Veränderung von  $U$  zwar der Spannungsbereich der X-Achse, nicht aber die Größe des Bildes auf dem Bildschirm geändert wird. Die Größe des Bildes lässt sich mit der "X-Ablenkung" einstellen).

Durch einen besonderen Spannungsverlauf an der Anode und den Buchsen der X-Ablenkung (siehe Abbildung) werden zusätzliche Koordinatenachsen auf dem Bildschirm geschrieben. Machen Sie sich das Entstehen des Bildes entsprechend diesen Spannungsverläufen klar.



#### Statischer Betrieb

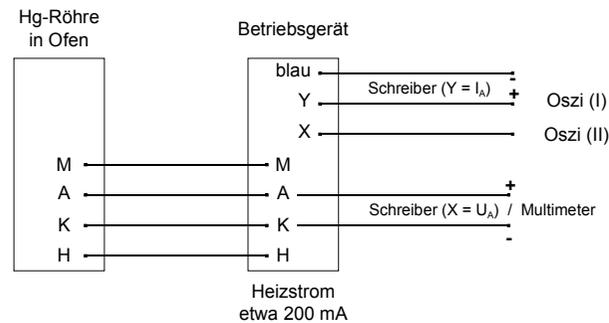
Im statischen Betrieb (-) bleibt die Anodenspannung konstant und kann mit dem zugehörigen Drehknopf eingestellt werden.

#### Kathodenheizung

Die Funktion der Röhren (Form der Anregungskurve mit Zahl und Ausprägung der beobachteten Minima und Maxima) hängt in sehr empfindlicher Weise von der Elektronen-Emission, und damit von der Heizleistung der Kathode ab (Heizspannung, Heizstrom).

#### Zu Aufgabe 1 (Optimierung der Hg-Röhre bei dynamischem Betrieb)

Ofen auf etwa 190 °C aufheizen (etwa 150-160 Skt am Stelltransformator). Anschluss der Franck-Hertz-Röhre entsprechend den Bezeichnungen auf den Geräten bzw. dem folgenden Schaltbild:



#### ACHTUNG: Kathodenheizung vor Anlegen der Anodenspannung 10 Minuten vorheizen!

Der Kathoden-Heizstrom muss sehr geduldig und sorgsam eingeregelt werden. Bei zu hoher Kathoden-Emission zusammen mit zu großer Anodenspannung zündet die Röhre durch und bildet eine selbständige Gasentladung aus. Dies äußert sich in einer plötzlichen Übersteuerung des Verstärkers und kann auch an der Lichtemission der Röhre ("Lampe") beobachtet werden. Der Heizstrom ist auch während der weiteren Versuchsdurchführung ständig zu kontrollieren.

Betriebsgerät auf dynamischen Betrieb stellen ( $\angle$ ). Beschleunigungsspannung zunächst auf 0 stellen und bei der späteren Versuchsdurchführung kontrolliert hochregeln.

Oszilloskop auf X-Y-Betrieb stellen. Eingänge gleichstrommäßig koppeln (DC), Eingangsempfindlichkeiten 1 V/cm. Leuchtpunkt mit den Drehknöpfen Y- und X-Position auf die Mitte des Bildschirms bringen. Größe und Lage des Bildes mit Nullpunkt, Verstärkung und X-Ablenkung einstellen. Der dargestellte Spannungsbereich wird durch die Einstellung  $U_B$  am Röhren-Betriebsgerät bestimmt. Nach Optimierung der Kurve werden die zugehörigen Parameter protokolliert.

#### Zu Aufgabe 2 (Quantitative Aufnahme der Kurve mit dem Schreiber)

Wenn die Apparatur und der Versuchsablauf vollständig verstanden sind, den Schreiber mit X direkt an die Anodenspannung ("K" und "A") und mit Y an den Verstärkerausgang (blaue und rote Buchse) anschließen (siehe Schaltskizze).

X-Y-Schreiber sind empfindliche und teure Instrumente. Den Schreiber bitte sorgfältig bedienen und die zusätzlichen Hinweise im Platzskript beachten. Die Spektren zur Vermeidung übermäßig schneller Spannungsänderungen langsam durchfahren.

Zur Registrierung der Spektren Umschalter am Betriebsgerät auf den statischen Betrieb (-) schalten und die Anregungskurven durch sehr vorsichtiges Hochregeln des Drehknopfes für die Anodenspannung aufzeichnen.

Zur optimalen Ausnutzung der Messbereiche vorzugsweise die variablen Bereichseinstellungen wählen (VAR). Bei der Optimierung der Schreiber-Einstellungen von gering-empfindlichen Einstellungen ausgehen und den Schreibstift zunächst hochgestellt lassen.

Zur Kalibrierung der X-Achse werden ein Multimeter parallel zum Eingang geschaltet und die Spannungsanfangs- und endwerte der Spektren gemessen und direkt auf dem Diagramm notiert (Markierungen durch kleine Bewegungen mit Y-Position schreiben).

Aufgrund von Kontaktspannungen zwischen Kathode und Anode erscheinen die Minima verschoben. Zur Auswertung der Anregungsenergie werden in einer grafischen Darstellung die Spannungen der Minima gegen die Ordnungszahlen aufgetragen. Die Anregungsspannung kann aus dem Anstieg der sich ergebenden Geraden entnommen werden.

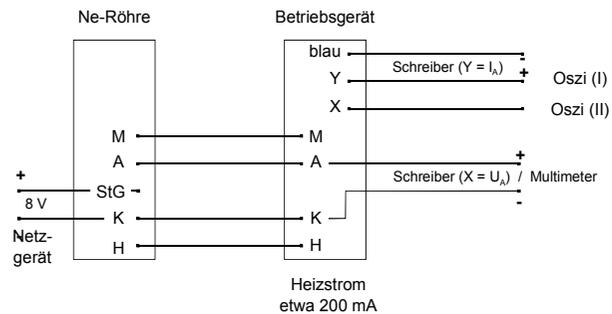
#### Aufgabe 3 (Anregungskurven bei weiteren Temperaturen)

Für weitere Ofen-Temperaturen von etwa 150 und 210 °C werden die Anregungskurven bei Beobachtung auf dem Oszilloskop optimiert. Bei niedrigen Temperaturen erhält man große Auffängerströme und kann entsprechend nur relativ kleine Beschleunigungsspannungen einstellen, ohne dass der Messverstärker die

Sättigungsgrenze erreicht. Die Kurven werden mit dem X-Y-Schreiber registriert.

Zu Aufgabe 4 (Aufnahme der Anregungskurve für Neon)

Der Anschluss der Ne-Röhre erfolgt entsprechend dem der Hg-Röhre, jedoch mit einer zusätzlichen Hilfsspannung für ein Steuergitter (siehe nachfolgende Schaltskizze).



**ACHTUNG: Kathodenheizung vor Anlegen der Anodenspannung 10 Minuten vorheizen!**

Die Kathodenheizung (etwa 260 mA) und auch die Steuerspannung (etwa 8 V) werden wieder durch Kontrolle des Spektrums auf dem Oszilloskop optimiert (bestes Minima-Maxima-Verhältnis).

## PHOTOEMISSION

## GP II

Stichworte

*Hallwachs-Effekt*, licht-/ photoelektrischer Effekt; äußerer Photoeffekt. Quantentheorie des Lichts, Quantenoptik, Photon.

*Einstein-Beziehung*. Austrittsarbeit.

Ziele des Versuchs

Reproduktion eines klassischen Experiments zur phänomenologischen Einführung in die Quantennatur des Lichts.

Literatur

[1]: Kapitel 8.1.2, 12.1.1, 13.6.2

[4]: Kapitel 7.1, 7.2, 7.4

Aufgaben

1. Aufbau und Justierung der Apparatur.
2. Messung des Sättigungsstromes und der Bremsspannung einer Kalium-Photozelle in Abhängigkeit von der Beleuchtungsstärke für die 436-nm-Linie (indigo/blau) von Quecksilber.
3. Aufnahme der Strom-Spannungs-Kennlinien für alle Hauptlinien des Quecksilber-Spektrums. Auswertung der Kennlinien und Bestimmung des *Planckschen Wirkungsquantums* und der Austrittsarbeit von Kalium.
4. Theoretische Aufgabe für die Ausarbeitung: Darstellung der Widersprüche zwischen den experimentellen Ergebnissen der Photoemission und der klassischen Wellentheorie des Lichts.

Physikalische GrundlagenHallwachs-Effekt

*Heinrich Hertz* (1857-1894; dt. Physiker) sagte in seinem Vortrag "*Über die Beziehung zwischen Licht und Elektrizität*" aus dem Jahre 1889: "Die Wellennatur (des Lichtes) ist, menschlich gesprochen, Gewissheit;

(und) was aus derselben mit Sicherheit folgt, ist ebenfalls Gewissheit!"

Zur selben Zeit untersuchten *Hertz* selbst und andere die Beeinflussung von elektrischen Entladungsvorgängen durch Lichtstrahlung. *Wilhelm Hallwachs* (1859-1922; dt. Physiker) entdeckte 1888, dass eine Metallplatte bei Bestrahlung mit kurzwelligem Licht (negative) elektrische Ladungen abgibt und sich dabei positiv auflädt, jedoch nur bis zu einer bestimmten Spannung, dem *Haltepotential*, ab der die ausgelösten Ladungen zurückgehalten werden (*Hallwachs-Effekt*). Die durch das Licht aus dem Metall ausgelösten Ladungen wurden als Elektronen identifiziert (*Photoemission*).

In der Folgezeit wurden sehr intensive Untersuchungen dieses Effekts durchgeführt, da die Beobachtungen in Widerspruch zur herrschenden Wellentheorie des Lichtes standen. Die Messungen der Menge (Photostrom) und der kinetische Energie der ausgelösten Elektronen in Abhängigkeit von der angelegten Spannung und der Wellenlänge des Lichtes zeigten folgende wesentlichen Ergebnisse:

- Der Effekt erfolgt augenblicklich und verzögerungslos.
- Der Sättigungsstrom ist proportional zur Intensität des eingestrahnten Lichtes.
- Die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen ist unabhängig von der Intensität des Lichtes.
- Die kinetische Energie hängt dagegen von der Frequenz des Lichtes ab und nimmt mit steigender Frequenz zu.
- Es gibt eine untere Grenzfrequenz für den Effekt (langwellige Grenze).

Licht-Quantentheorie

*Albert Einstein* (1897-1955; dt./am. Physiker) schlug 1905 zur Erklärung der Beobachtungen die Annahme einer neuen Korpuskulartheorie des Lichts vor:

- Licht der Frequenz  $\nu$  besteht aus Lichtquanten (Photonen), die sich geradlinig mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegen und die Energie (Quantenenergie)  $h\nu$  tragen (photoelektrische Einstein-Beziehung).

- Bei der Photoemission teilt ein Photon seine Gesamtenergie augenblicklich einem Elektron mit, wobei die Energie  $h\nu$  in die Austrittsarbeit aus der Metalloberfläche und in kinetische Energie des Elektrons überführt wird.

Die Konstante  $h$  ist das *Plancksche Wirkungsquantum* (Max Planck; 1858-1947; dt. Physiker)

Austrittsarbeit

Die Austrittsarbeit ist die erforderliche Energie, um ein Elektron aus einem Festkörper (insbesondere Leitungselektronen aus Metallen) durch die Oberfläche in den Außenraum zu bringen. Vergleichsweise geringe Austrittsarbeiten mit etwa 2 eV und einer langwelligen Grenze im Bereich sichtbaren Lichts besitzen die Alkalimetalle, deren leichtere Elektronenabgabe sich auch in den chemischen Eigenschaften widerspiegelt. Die übrigen, im Periodensystem weiter rechts liegenden Metalle besitzen Austrittsarbeiten von 4 bis 5 eV mit langwelligen Grenzen im Ultraviolett.

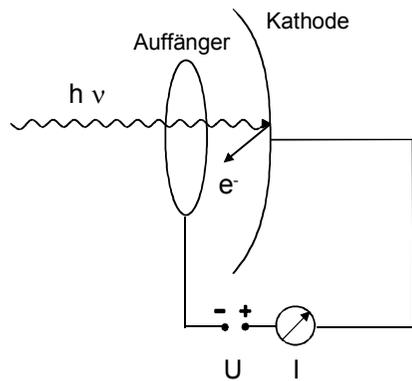
Die Austrittsarbeit ist abhängig von den Kristallflächen, durch die das Elektron tritt, und insbesondere vom jeweiligen Zustand der Oberfläche. Literaturwerte sind daher als Näherungswerte zu betrachten. Die Austrittsarbeit von Kalium beträgt (*Kohlrausch*; Praktische Physik Band 3; Teubner):

$$(1) \quad U_A = 2,25 \text{ eV} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\text{Grenz}} = 551 \text{ nm}$$

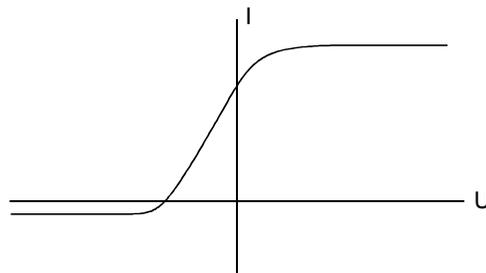
Experimentelle Anordnung

Der (auch im Versuch vorliegende) einfachste experimentelle Aufbau besteht aus einer flächenförmigen Kathode mit dem Untersuchungsmaterial und einer Gegenelektrode zur Herstellung eines Gegenpotentials

und zum Auffangen des Photostroms (siehe folgende Abbildungen).



Prinzipschaltskizze der Photozelle



Typischer Kennlinienverlauf

Als Kathodenmaterial für einfache Experimente werden meist Alkalimetalle benutzt (beim vorliegenden Versuch Kalium), die eine niedrige Austrittsarbeit und eine relativ hohen *Quantenausbeute* besitzen (Verhältnis zwischen der Zahlen der eingestrahlenen Photonen und den ausgelösten Elektronen).

Die erzielten Photoströme sind dennoch sehr gering und liegen in der Größenordnung einiger Nano- bis Picoampere. Die Messung derart kleiner Ströme ist durchaus schwierig und zahlreichen Störeinflüssen unterworfen, so dass im Rahmen der weniger anspruchsvollen Möglichkeiten einer Praktikumsappara-

tur mit größeren Abweichungen und Fehlern gerechnet werden muss.

Die Kennlinien der Zelle (*I-U*-Diagramme) haben etwa den in der links nebenstehenden Abbildung skizzierten Verlauf. Statt eines (theoretisch zu erwartenden) Abschneidens des Stroms bei der Maximalenergie der Elektronen (Bremsspannung  $U_0$ ) führt die Kennlinie mit einem negativen Photostrom weiter, der von Photoemission in umgekehrter Richtung von der Gegenelektrode zur Kathode herrührt.

Der genauen Diskussion und Auswertung der Kennlinien können eine Reihe theoretischer und empirischer Annahmen über den Verlauf zugrunde gelegt werden. Im Rahmen der Versuchsumstände (s.o.) sollen als Näherungsansätze zur quantitativen Auswertung als Bremspotential zum einen die *tatsächlichen Nulldurchgänge*  $U_0$  und als Alternative die aus dem linearen Bereich der Kennlinien *extrapolierten Nulldurchgänge*  $U'_0$  herangezogen werden. Diesem Ansatz liegt die Überlegung zugrunde, dass die Messumstände bei  $I_{ph} = 0$  noch stärkeren Störeinflüssen unterworfen sind, und die Messeinstellungen mit größeren Photoströmen stabileren Charakter zeigen.

Auch die Austrittsarbeit ist real kein sehr sicherer Parameter, da sie stark von dem Zustand der Oberfläche abhängt, wobei für eine gegebene ausgedehnte Oberfläche starke Ungleichmäßigkeiten auftreten. Die Bestimmung der Austrittsarbeit aus Messungen des photoelektrischen Effekts wird zusätzlich durch Kontaktpotentiale gestört, die zu Verschiebungen der Haltepotentiale bzw. der kinetischen Energien der emittierten Elektronen führen können.

Wegen der Störeinflüsse und der geringeren Genauigkeit ist auf eine kritische Fehlerschätzung bei diesem Versuch besonderes Gewicht zu legen.

#### Apparatur und Geräte

Optische Bank (Dreikantschiene); Hg-Spektrallampe, Kondensator, Eintritts-Messspalt, Kollimator, Geradsichtprisma, Umlenkprisma, Objektiv. Kalium-Photozelle; Präzisions-Spannungsgeber, Pico-Amperemeter; Verbindungskabel.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

##### Optischer Aufbau

Der optische Aufbau enthält die spektroskopischen Grundbaugruppen (siehe *OPTISCHE SPEKTROMETER*) und besteht aus einem Beleuchtungsapparat (Lampe, Kondensator), einem Kollimator, einem Dispersionsprisma zur spektralen Zerlegung und einem Objektiv. Einzige Besonderheit ist, dass als Dispersionsprisma ein Geradsichtprisma mit einem hohen Dispersionsvermögen verwendet wird, das aus drei Einzelprismen aufgebaut ist und den Strahlengang nur wenig ablenkt. Zusätzlich ist ein weiteres Prisma zur 90°-Ablenkung des Strahlenganges in die Photozelle vorhanden. Durch Drehen des Ablenkprismas können die einzelnen Spektrallinien auf den Eintrittsspalt der Photozelle abgebildet werden.

Der optische Aufbau muss vor Beginn der Messungen sehr sorgfältig justiert werden. Wegen der vergleichsweise kleinen Photoströme lassen sich qualitativ und quantitativ befriedigende Ergebnisse nur bei einer sehr gut justierten Apparatur erzielen, wobei auf kurze Strahlengänge, eine gute Strahlführung und Ausleuchtung und eine weitgehende Unterdrückung von Streulicht geachtet werden muss. Die Justierung ist auch während der Messungen zu kontrollieren.

Die Einstellung der Linien auf den Eintrittsspalt der Photozelle kann durch Kontrolle des Photostromes ohne Gegenanode erfolgen.

##### Elektrischer Aufbau

Der elektrische Aufbau ist vergleichsweise einfach und besteht aus einer Serienschaltung der Photozelle, eines Spannungsgebers und eines Pico-Amperemeters.

##### Photozelle

Die Kaliumschicht ist mit dem oben aus dem Lampengehäuse herausgeführten Koaxialkabel verbunden und wird an den empfindlichen Koaxial-Eingang des Pico-Amperemeters angeschlossen.

Die Gegenelektrode ist ein Platinring, der auf beiden Seiten Kabel mit 4-mm-Steckern (Bananenstecker) trägt. Für die Messungen können die Stecker zusammengeschaltet werden.

### Pico-Amperemeter

Bei Einschalten zeigt das Pico-Amperemeter zunächst unbedeutende, sprunghafte Zeigerauslässe (Röhrengerät; Warmlaufphase). Nach Messbereichsumschaltungen muss wegen des hohen Innenwiderstandes unter Umständen ausreichend lange gewartet werden, bis sich stationäre Verhältnisse eingestellt haben.

Die Eingangsbuchse ist die große Koaxialbuchse, die Ausgangsbuchse die auf Erdpotential liegenden 4-mm-Buchse neben der Koaxialbuchse.

Die Polarität des Pico-Amperemeter kann mit einem Schalter an der rechten Seitenwand umgeschaltet werden.

Wegen der kleinen Photoströme ist die Messung sehr empfindlich gegen Fehlströme und Nullpunktfehler. Vor Beginn bzw. während der Messungen müssen daher der mechanische (bei ausgeschaltetem Gerät) und der elektrische Nullpunkt (bei offenem Eingang) möglichst genau abgeglichen und kontrolliert werden.

Der Messbereich muss den jeweiligen Sättigungsströmen bei großer Saugspannung (einige V) angepasst werden. Innerhalb der Messreihen zu den einzelnen Kennlinien darf der Messbereich nicht gewechselt werden, um Veränderungen der Messumstände und dadurch bedingte Sprünge in den Kennlinien zu vermeiden.

### Spannungsgeber

Die Pole des Spannungsgebers sind mit + und - bezeichnet. Die S-Buchse ist eine auf Erdpotential liegende Abschirmung (Schirm). Mit dem Umschalter (+/0/-) kann die Polarität des Spannungsgebers gewechselt bzw. der Ausgang kurzgeschlossen werden (0).

Die anzulegenden Spannungen liegen in der Größenordnung einiger Volt, so dass am Bereichsschalter ein Faktor 1000 zu wählen ist.

### Zu Aufgabe 1

(Sättigungsstrom und Bremsspannung in Abhängigkeit von der Lichtintensität für die indigo 436-nm-Linie)

Für die indigo Linie 436 nm werden punktweise bei einer (positiven) Saugspannung von etwa 8 V der Sättigungsstrom und die Bremsspannung zu  $I_{ph}=0$  in Abhängigkeit von der Öffnung des Spaltes gemessen.

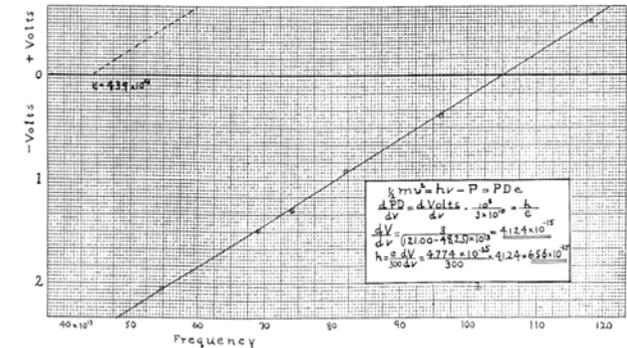
Die Messungen beginnen bei geschlossenem Spalt (Nullpunkt der Spalteinstellung) und müssen wegen der Empfindlichkeit der Anordnung und um innerhalb eines Messbereichs zu bleiben in 1/100-mm-Schritten für die Spaltöffnung durchgeführt werden. Dies ist an der Grenze des Auflösungsvermögens der Einstellung des Messspaltes, und die Einstellungen müssen besonders sorgfältig durchgeführt werden. Bei den Einstellungen bzw. Ablesungen am Messspalt ist zu berücksichtigen, dass die Skala rückwärts zählt. Zur Darstellung des Ergebnisses der Messung werden der Sättigungsstrom und die Bremsspannung in Abhängigkeit von der Spaltöffnung grafisch dargestellt.

### Zu Aufgabe 2 (Kennlinien)

Bei der Aufnahme der Kennlinien ist auf eine geeignete Dichte der Messpunkte zu achten (etwa 100-mV-Schritte). Zu jeder Kennlinie ist der Nulldurchgang für den Strom ( $I=0$ ) als eigener Messpunkt aufzunehmen.

Für diesen Teil des Experiments ist eine messbegleitende grafische Darstellung unbedingt erforderlich, bei der die Kurvenform und die Reproduzierbarkeit kontrolliert werden können.

Zur Auswertung werden aus den Kennlinien die tatsächlichen Nulldurchgänge ( $I=0$ ; Maximalenergie der Elektronen) und die durch Extrapolation des linearen Bereichs der Kennlinien gewonnenen, extrapolierten Nulldurchgänge in einer grafischen Darstellung gegen die Frequenz der Linien aufgetragen. Aus der erwarteten Geraden können dann die Austrittsarbeit  $U_A$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  ermittelt werden.



Vorstehende Abbildung: Original-Diagramm zu R.A. Millikan; A Direct Determination of Planck's 'h'; Physical Review 7, 355 (1916).

Bei der Auswertung bzw. Diskussion der Ergebnisse sind die unterschiedlichen Intensitäten der Spektrallinien bzw. eventuelle Intensitätsschwankungen der Lampe zu berücksichtigen.

### Hauptlinien des Quecksilber-Spektrums

577,0 / 579,1 nm	gelb	stark
546,1 nm	gelbgrün	stark
491,6 nm	blaugrün	sehr schwach
435,8 nm	indigo	stark
407,8 / 404,7 nm	violett	stark

## ZEEMAN-EFFEKT

## GP II

Stichworte

Atommodell; Elektronenzustände und Quantenzahlen. Orientierungsquantelung und Magnetquantenzahl. Termaufspaltung in schwachen Magnetfeldern; Strahlungsübergänge und *Zeeman-Effekt*.

Ziele des Versuchs

Phänomenologische Einführung in Quantisierungsercheinungen. Beobachtung und quantitative Untersuchung der Orientierungsquantelung und Termaufspaltung von Elektronenzuständen in Magnetfeldern.

Literatur

[1]: Kapitel 13.3, 13.4, 10.1.13

[4]: Kapitel 3.5

[5]: Kapitel 1.6.1, 1.6.2

Aufgaben

1. Untersuchung des normalen *Zeeman-Effektes* an der roten Cadmiumlinie ( $\lambda = 643,8$  nm) und Bestimmung der spezifischen Ladung des Elektrons.
2. Untersuchung des Polarisationsverhaltens der Aufspaltungskomponenten. Abschätzung der Linienbreite der Strahlung und Vergleich mit der instrumentellen Linienbreite des *Fabry-Perot-Etalons*.
3. Qualitative Beobachtung des anomalen *Zeeman-Effektes* an weiteren Cd-Übergängen (grün  $\lambda = 508,6$  nm, hellblau  $\lambda = 480,0$  nm, blau  $\lambda = 467,8$  nm).

Physikalische Grundlagen*Zeeman-Effekt*

Freie Atome senden ein für das jeweilige Element charakteristisches Linienspektrum aus. Untersucht

man diese Spektren in einem Magnetfeld, so stellt man eine Aufspaltung jeder einzelnen Linie in eine mehr oder weniger große Anzahl scharfer Linienkomponenten fest. Diese Aufspaltung der Linien in einem (schwachen) Magnetfeld wurde erstmals 1896 von dem niederländischen Physiker *Pieter Zeeman* (1865-1943) beobachtet und in der Folge als *Zeeman-Effekt* bezeichnet.

Die Änderung der Zustands- und Übergangsenergie beruht auf der zusätzlichen und von der Einstellung abhängigen potentiellen Energie der magnetischen Momente der Atome in dem Magnetfeld. Aus der Aufspaltung in eine bestimmte Anzahl, d.h. in diskrete Aufspaltungsniveaus folgt, dass für den die Dipolenergie bestimmenden Winkel zwischen dem Dipolmoment und dem Feld nur bestimmte Werte möglich sind, und dass auch die Richtung der Momente bzw. der Atome quantisiert ist.

Viele Grundlagen dieses Versuchs, wie die Quantisierung selbst, die quantenmechanische Drehimpulse, Auswahlregeln, *Landé-Faktoren* u.s.w., lassen sich nur quantentheoretisch verstehen, und an einigen Stellen dieser Darstellung müssen Beziehungen oder Ergebnisse aus der Quantentheorie übernommen werden, deren Herleitung und tiefergehendes Verständnis erst später erarbeitet werden kann. Wegen der Bedeutung des Effekts und seiner Grundlagen ist es aber wichtig, sich durch eine frühzeitige, phänomenologische und halbklassische Betrachtung auf ein späteres, weiterführendes Verständnis vorzubereiten.

Magnetische Dipole und Dipolenergie im Magnetfeld

Magnetpole treten immer paarweise auf, und magnetische Objekte erfahren in einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}$  ein Drehmoment  $\mathbf{M}$ :

$$(1) \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\mu}$  das *magnetische Moment* des Systems, das zur späteren Unterscheidung gegen die Magnetquantenzahl  $m$  hier mit einem griechischen  $\boldsymbol{\mu}$  bezeichnet werden soll.

In einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}$  besitzt ein Dipol eine potentielle Energie  $U$ , die von der Richtung zwischen Dipolmoment und Feld abhängt:

$$(2) \quad U_{\psi} = - \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -\mu B \cos(\mu, \mathbf{B})$$

Haben Feld und Dipolmoment die gleiche Richtung (wie dies bei der späteren Betrachtung gegeben ist), so ist die Energie:

$$(3) \quad U_{\mu} = -\mu B$$

Magnetisches Moment eines "klassischen" Bahnelektrons

Für ein Elektron auf einer Atombahn sind durch die Einheit von Masse und Ladung das magnetische Moment  $\boldsymbol{\mu}$  und der Drehimpuls  $L$  parallel und proportional zueinander (*magnetomechanischer Parallelismus*).

Der Umlauf des Elektrons (Ladung  $e$ , Umlaufzeit  $T$ ) auf einer Elektronenbahn (Radius  $r$ ) stellt eine Stromschleife dar, wobei für den Betrag des magnetischen Moments gilt (Strom  $I$ , Querschnittsfläche  $S$ ):

$$(4) \quad \mu = I S = \frac{-e}{T} \pi r^2 = -\frac{e}{2\pi} \omega \pi r^2 = -\frac{1}{2} e \omega r^2$$

Der Betrag des Bahndrehimpuls des Elektrons (Masse  $m_e$ ) beträgt:

$$(5) \quad L = m_e \omega r^2$$

Zusammengefasst kann das magnetische Moment durch den Bahndrehimpuls ausgedrückt werden:

$$(6) \quad \boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} = -\gamma \mathbf{L}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $e/2m_e = \gamma$  zwischen Drehimpuls und magnetischem Moment wird *gyromagnetisches Verhältnis* genannt.

Quantenmechanischer Bahndrehimpuls

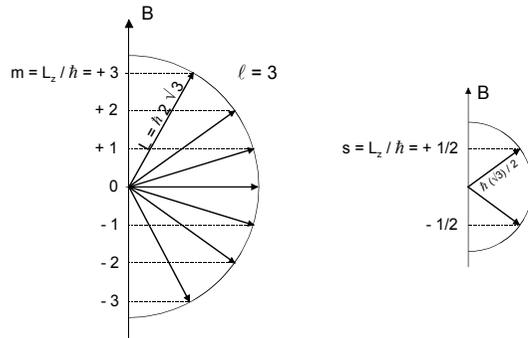
Aus der Quantenmechanik folgt, dass die Drehimpulse der Elektronen nach Betrag und Richtung in Einheiten von  $\hbar$  quantisiert sind, wobei nur der Betrag und eine Komponente in Bezugsrichtung (Bezeichnung  $z$ -Richtung) festgelegt werden können:

$$(7) \quad |\mathbf{L}| = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)} \quad \text{mit} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$(8) \quad L_z = \hbar m \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

Die Laufindizes  $\ell$  und  $m$  heißen Bahndrehimpulsquantenzahl und Orientierungs- oder Magnetquantenzahl; sie charakterisieren den Zustand eines Elektrons, genau wie die Hauptquantenzahl  $n$ , die den Radius der Atombahn beschreibt.

Die Quantisierung auch der Bezugskomponente bei gegebenem Betrag bedeutet, dass der Gesamtdrehimpuls, d.h die Elektronenbahn, nur bestimmte Richtungen bzw. Neigungen gegenüber der Bezugsrichtung einnehmen kann. In der folgenden Abbildung links ist ein Beispiel für  $\ell=3$  dargestellt.



Magnetische Drehimpulsorientierungen  
des Bahndrehimpulses und des Spins

Die Beträge der magnetischen Momente für den Bahndrehimpuls bzw. die z-Komponente lauten dann mit (6), (7) und (8):

$$(9) \quad \mu_L = \frac{e \hbar}{2 m_e} \sqrt{\ell(\ell+1)} = \mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

$$(10) \quad \mu_z = \frac{e \hbar}{2 m_e} m = \mu_B m$$

wobei der Faktor  $\mu_B$

$$(11) \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e}$$

als *Bohrsches Magneton* (Niels Bohr, 1885-1962; dän. Physiker) bezeichnet wird.

### Spin

Der *Stern-Gerlach-Versuch* zeigt eine magnetische Kraftwirkung in inhomogenen Magnetfeldern auch bei Atomen mit verschwindendem Bahndrehimpuls ( $L=0$ ) mit zwei diskreten Wertausprägungen. Daraus folgt, dass die Elektronen selbst ein magnetisches Moment aufgrund eines Eigendrehimpulses (*Spin*) besitzen müssen, für den (nur) zwei Einstellungen der z-Komponente möglich sind.

Für Betrag und z-Komponente dieses Spins gelten die gleichen quantenmechanischen Regeln (7) und (8), wobei die Spin-Drehimpulsquantenzahl eines Teilchens mit  $s$  bezeichnet wird. Nach (8) ist die Zahl der möglichen z-Komponenten  $2\ell+1$  bzw.  $2s+1$ , die experimentell mit 2 beobachtet wird, so dass für die Spin-Quantenzahl gilt:

$$(12) \quad 2s+1=2 \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{1}{2}$$

Beide Spineinstellungen sind nicht parallel zum äußeren Feld; ihre Lage ist in der nebenstehenden Abbildung rechts dargestellt.

Die Messungen des magnetischen Moments des Spins ergeben nun einen etwa doppelt so hohen Wert wie nach den bisherigen Betrachtungen zu erwarten, was durch einen zusätzlichen *g-Faktor* ( $g_s$ ) für das magnetische Moment ausgedrückt wird (*Landéscher g-Faktor*, Alfred Landé; \*1888; dt./am. Physiker):

$$(13) \quad \mu_s = 2,0023 \mu_B \sqrt{s(s+1)}$$

Das gyromagnetische Verhältnis lässt grundsätzlich Aussagen zur Massen- und Ladungsverteilung eines Systems zu. Da das Elektron als Elementarteilchen aber nicht strukturell betrachtet werden kann, bezeichnet man den doppelten Wert des magnetischen Moments als *magnetische Anomalie* des Elektrons. Der Faktor 2 ergibt sich jedoch aus der relativistischen Quantentheorie (*Diractheorie*; Paul Adrian Maurice

Dirac, \*1902, brit. Physiker), und der genaue Wert von 2,0023 unter weiterer quantenelektrodynamischer Berücksichtigung der Wechselwirkung des Elektrons mit seinem eigenen Strahlungsfeld.

Korrekturen des gyromagnetischen Verhältnisses können verallgemeinert durch einen *g-Faktor* ausgedrückt werden, der dann für reinen Bahndrehimpuls nach (6) den Wert  $g_J=1$  besitzt.

### Gesamtdrehimpuls und magnetisches Moment eines Atoms

Maßgebend für die Zustände eines Atoms ist die Gesamtheit der Elektronen in der äußeren Schale (Leuchtelektronen), wobei sich der Gesamtdrehimpuls  $J$  vektoriell aus dem Bahndrehimpuls  $L$  und dem Spin  $S$  zusammensetzt. Dabei können innere, abgeschlossene Schalen für den Gesamtdrehimpuls unberücksichtigt bleiben, da sich ihre Einzeldrehimpulse gegenseitig kompensieren.

Aufgrund der unterschiedlichen *g-Faktoren* des Bahn- und Spinmoments liegt die Vektorsumme des magnetischen Moments aber nicht mehr parallel zum Gesamtdrehimpuls, und die physikalisch maßgebliche, zu  $J$  parallele Komponente (Bezugsrichtung) des magnetischen Moments hängt von den Quantenzahlen ab, die dann eine kompliziertere Form des atomaren *g-Faktors*  $g_J$  bestimmen. Die Quantenzahlen für das gesamte Atom werden mit Großbuchstaben bezeichnet, und für das magnetische Moment ergibt sich entsprechend zu (9), (10) oder (13):

$$(14) \quad \mu_J = g_J \mu_B \sqrt{J(J+1)}$$

$$(15) \quad g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

### Quantenmechanische Auswahlregeln

Auch für optische Übergänge gelten die Erhaltungssätze. Dabei schränkt der Drehimpulserhaltungssatz die Zahl der Übergänge ein, da Photonen entweder links- oder rechtszirkular polarisiert sind und eine Eigendrehimpulsquantenzahl von  $s=\pm 1$  aufweisen. Bei optischen Übergängen gilt deshalb für die in Ausbreitungsrichtung des Lichts liegende Komponente des

atomaren Bahndrehimpulses die sogenannte *Auswahlregel*

$$(16) \quad \Delta M_L = 0 \quad \text{oder} \quad \pm 1$$

Atome im Magnetfeld: Larmor-Präzession und Zeeman-Effekt

Bringt man ein Atom in ein Magnetfeld, so hat dies zwei Folgen. Zum einen spalten die Zustände  $E_i$  des Atoms durch die magnetische Dipolenergie der quantenmechanisch möglichen Orientierungen in eine diskrete Anzahl von  $2J+1$  Komponenten mit einer Energiedifferenz  $\Delta E_i$  gemäß (3) und (14) auf, was als *Zeeman-Effekt* bezeichnet wird.

$$(17) \quad \Delta E_i = g_J \mu_B B$$

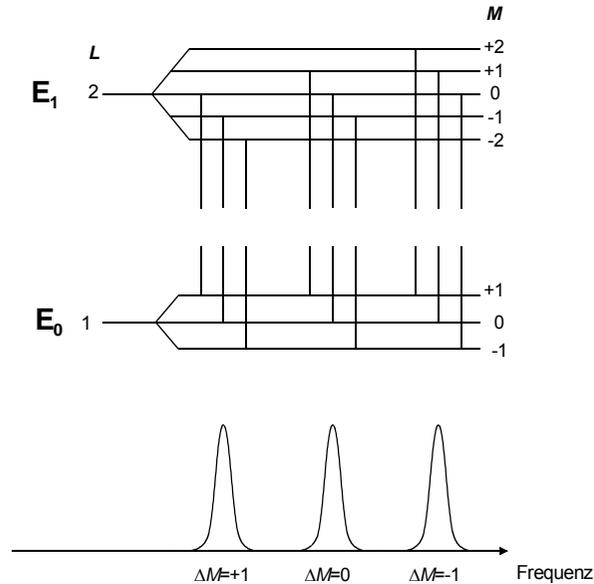
Zum anderen bewirkt die Dipolkraft ein Drehmoment, was zu einer Präzession des Atoms als Kreisel um die Feldachse führt (*Larmor-Präzession*; Sir Joseph Larmor, 1857-1942, brit. Physiker) mit der Frequenz (*Larmor-Frequenz*):

$$(18) \quad \omega_L = \frac{e}{2m_e} B = \gamma B$$

Normaler Zeeman-Effekt ( $S=0$ )

Für Übergänge ergeben sich besonders einfache Verhältnisse, wenn beide Zustände spinlos mit  $S=0$  und  $J=L$  sind, weil der  $g$ -Faktor dann den Wert 1 hat, und die *Zeeman-Aufspaltung* der Niveaus gleich groß ist (äquidistant). Die Übergänge zwischen den aufgespaltenen Niveaus der Zustände sind zusätzlich durch die Auswahlregel  $\Delta M = 0$  oder  $\pm 1$  eingeschränkt, so dass immer drei Linienkomponenten entstehen, die man das *normale Zeeman-Triplett* nennt. Die Bezeichnung *normal* für diesen Fall hat sich historisch entwickelt, obwohl der *normale Zeeman-Effekt* die Ausnahme darstellt.

Die folgende Abbildung zeigt die Term aufspaltung für einen Grundzustand  $E_0$  mit  $L=1$  und einen angeregten Zustand  $E_1$  mit  $L=2$ , wie es dem Übergang mit  $\lambda = 643,8$  nm im Cadmium entspricht.



Strahlungscharakteristik

Die emittierte Strahlung beim *Zeeman-Effekt* besitzt ein bestimmtes Intensitäts- und Polarisationsverhalten in Abhängigkeit von der Quantenzahländerung  $\Delta m$  des Übergangs. Dies kann erklärt werden, wenn man als Ursache der Strahlung ein umlaufendes Elektron auf einer Bahn betrachtet, die dem Übergang zwischen zwei Zuständen entspricht, und die Bahnbewegung in (geeignete) Komponenten zerlegt: In eine lineare, parallel zum  $B$ -Feld oszillierende  $z$ -Komponente für  $\Delta m=0$ , d.h. für Drehimpuls in der  $x$ - $y$ -Ebene bzw. in zwei polare und gegenläufig umlaufende Komponenten in der  $x$ - $y$ -Ebene für  $\Delta m=1$ , d.h. für Drehimpuls in  $z$ -Richtung.

$\pi$ -Komponente mit  $\Delta m = 0$

Durch die Bewegung parallel zum Feld erfährt das Elektron keine zusätzliche Kraft bzw. Energie, und der Übergang entspricht der ursprünglichen, ungestörten Übergangsfrequenz. Die Strahlung des linear oszillierenden Elektrons entspricht dabei einem *Hertzscher Oszillator* (*Heinrich Hertz*, 1857-1894, dt. Physiker). Sie ist linear polarisiert und anisotrop, d.h. maximal senkrecht zur Dipolachse und Null in Richtung der Achse.

In der Folge beobachtet man für  $\Delta m=0$  bei sogenannter *transversaler Beobachtung* senkrecht zum  $B$ -Feld (wie im vorliegenden Versuch) parallel zum Feld polarisierte Strahlung. Bei *longitudinaler Beobachtung* in Richtung des Feldes verschwindet diese Komponente.

$\sigma$ -Komponente mit  $\Delta m = \pm 1$

Je nach Umlaufrichtung werden die zirkular umlaufenden Elektronen durch das  $B$ -Feld beschleunigt oder verzögert, so dass sich die Umlauffrequenz, d.h. die Übergangsfrequenz, erhöht oder erniedrigt.

Bei transversaler Beobachtung addieren sich dabei die in der  $x$ - $y$ -Ebene gegenläufig zirkular polarisierten Komponenten zu einer senkrecht zur  $z$ -Richtung linear polarisierten Komponente, während man longitudinal in Richtung des Feldes die beiden zirkular polarisierten Komponenten direkt beobachtet.

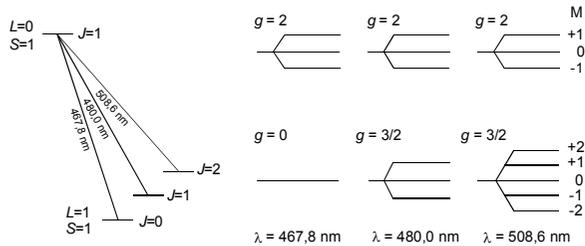
Anomaler Zeeman-Effekt

Der *anomale Zeeman-Effekt* beschreibt die Verhältnisse bei Zuständen mit nicht verschwindendem Spin  $S \neq 0$ , der dadurch verwickelt wird, dass die beiden am Übergang beteiligten Zustände nicht den gleichen  $g$ -Faktor und damit nicht die gleiche Aufspaltung besitzen. Als Folge kann eine große Anzahl von Linienkomponenten mit unterschiedlichen Abständen entstehen.

Die drei Cadmium-Linien  $\lambda = 467,8; 480,0$  und  $508,6$  nm gehören zu den Übergängen von einem Zustand ohne Bahndrehimpuls ( $L=0$ ) zu drei anderen Zuständen mit jeweils  $L=1$ . Die Spinquantenzahl aller Zustände ist  $S=1$  (zwei Elektronen mit parallelem Spin). Die Quantenzahlen für den Gesamtdrehimpuls der unteren Zustände sind  $J=0, 1$  und  $2$ . Die Parallelstellung von Spin und Bahndrehimpuls koppelt zu  $J=L+S=2$ , und die Antiparallelstellung zu  $J=L-S=0$ . Dazwischen liegt als weiterer Wert  $J=1$ . Diese drei ( $=2S+1$ ) benachbarten Zustände bilden ein sogenanntes *Feinstruktur-Triplett*. Der obere Zustand ist im Sinne der Feinstruktur (Spin-Bahn-Kopplung) *einfach*; zu  $L=0$  und  $S=1$  gibt es als einzige ganzzahlige, nicht-negative Kombination  $J=1$ .

Im Magnetfeld spaltet jeder Zustand in  $2J+1$  äquidistante Komponenten auf. In der folgenden Abbildung sind ein Ausschnitt des Termschemas von Cadmium

und die Aufspaltung der Zustände im Magnetfeld dargestellt.



Auswahlregeln für die Übergänge ist, wie beim normalen *Zeeman-Effekt*,  $\Delta M=0$  oder  $\pm 1$ . Zusätzlich ist zwischen Energieniveaus mit gleichem  $J$  der Übergang zwischen den Unterzuständen mit  $\Delta M=0$  aufgrund quantenmechanischer Auswahlregeln *verboten*, was bei der 480-nm-Linie den Ausfall des ursprünglichen Übergangs bedeutet.

Der Übergang  $\lambda = 467,8$  nm stellt einen Sonderfall dar. Hier ergibt auch der anomale *Zeeman-Effekt* genau drei Linien, deren Frequenzabstand aber wegen  $g=2$  im oberen Niveau doppelt so groß ist wie beim normalen *Zeeman-Triplett*.

#### Linienbreite optischer Übergänge

Klassisch kann ein strahlendes Atom als gedämpfter Oszillator betrachtet werden, der durch die Abstrahlung seine Energie laufend verliert. Das zugehörige Frequenzspektrum hat dann die Form einer Glockenkurve, deren Breite durch die Dämpfungskonstante bestimmt wird. Im quantenmechanischen Bild entspricht den Abklingkonstanten die mittlere Lebensdauer des Systems und die endliche Linienbreite erklärt sich aus der *Heisenbergschen Unschärferelation* (*Werner Heisenberg*, \*1901; dt. Physiker). Die Abklingkonstante optischer Übergänge liegt in der Größenordnung von  $10^{-8}$  s, woraus als *natürliche Linienbreite* ein Wert von etwa  $10^{-5}$  nm folgt.

Unter realen Bedingungen werden die Linien zusätzlich verbreitert. In einem Ensemble von Atomen werden durch Stöße untereinander oder mit Fremdatomen die mittleren Lebensdauern verkürzt (*Druckverbreiterung*). Wegen der thermischen Bewegung der Atome treten bei der Abstrahlung aufgrund des *Doppler-*

*Effekts* (*Christian Doppler*, 1803-1853; östr. Physiker und Mathematiker) Linienverschiebungen auf, die wegen der statistischen Verteilung der Geschwindigkeit zu einer Verbreiterung führen (*Doppler-Verbreiterung*). Zusätzlich gibt es unter verschiedenen Bedingungen eine Reihe weiterer, komplizierter Wechselwirkungsprozesse, die Linienverbreiterungen verursachen können.

#### Fabry-Perot-Spektrometer

Die messtechnische Problemstellung des Experiments besteht darin, die vergleichsweise geringe Linienaufspaltung ausreichend aufzulösen. Für eine typische Wellenlänge von 500 nm, bzw. eine Strahlungsfrequenz von  $6 \cdot 10^{14}$  Hz, und ein hinreichend kleines Magnetfeld von 0,5 T folgt aus Gleichung (17) eine relative Linienaufspaltung von etwa  $10^{-4}$ . Soll die Aufspaltung quantitativ untersucht werden, so muss das Auflösungsvermögen des Messverfahrens deutlich besser sein und wenigstens  $10^{-5}$  bis  $10^{-6}$  betragen. Ein dafür geeignetes Instrument ist der *Fabry-Perot-Etalon*, ein hochauflösendes Interferenzspektrometer (siehe auch Skript *FABRY-PEROT-ETALON*).

Ein *Fabry-Perot-Etalon* ist ein *optischer Resonator*, der aus zwei planparallelen, teilverspiegelten Grenzflächen und einem eingeschlossenen optischen Medium gebildet wird. Eine einfallende, ebene Welle wird durch "Zick-Zack-Reflexion" in eine Vielzahl kohärenter Teilwellen aufgespalten, die zu Vielzahlinterferenzen im reflektierten oder im transmittierten Licht mit sehr scharfen Maxima, und damit einem sehr hohen Auflösungsvermögen führen.

Der Etalon besitzt andererseits einen vergleichsweise kleinen freien Spektralbereich (überlagerungsfrei und ungestört beobachtbarer Ausschnitt eines Spektrums) und eignet sich bevorzugt zur Untersuchung nahezu monochromatischen Lichts oder zur Feinuntersuchung enger Wellenlängenbereiche nach einer Vorzerlegung wie bei diesem Versuch.

In der Anwendung als Spektrometer werden der Etalon mit divergentem Licht beleuchtet und die zu den einzelnen Interferenzordnungen gehörenden parallelen Strahlen mit einer Sammellinse auf eine Beobachtungsebene abgebildet. Aufgrund der Rotationssymmetrie der optischen Anordnung erhält man in der Brennebene der Linse konzentrische Ringe gleicher

Neigung (*Haidingersche Ringe*; *Wilhelm Ritter von Haidinger*, 1795-1871; östr. Geologe und Mineraloge), wobei der auftretenden Neigungswinkel von der Interferenzordnung und der Wellenlänge der Strahlung bestimmt wird. Für kleine Wellenlängendifferenzen und eng benachbarte Ringe gleicher Ordnung gilt, wenn  $r$  und  $r'$  die Radien der Ringe sind:

$$(19) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{2f^2} \cdot (r'^2 - r^2)$$

Die instrumentelle Halbwertsbreite  $2\Delta z$  des Etalons in Einheiten des Ordnungsabstandes (freier Spektralbereich) wird hauptsächlich durch den Grad der Verspiegelung des Plattenpaares bestimmt:

$$(20) \quad 2\Delta z = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$$

Für einen Reflexionsgrad  $R$  von 92% (Silberspiegel) ergibt sich  $2\Delta z=0,026$ , d.h. eine Breite von etwa 3 % des Abstandes der Interferenzstreifen benachbarter Ordnung. Für einen Plattenabstand von 5 mm folgt daraus für die Linienbreite (siehe *FABRY-PEROT-ETALON*):

$$(21) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} 0,026 = 0,0009 \text{ nm} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6}$$

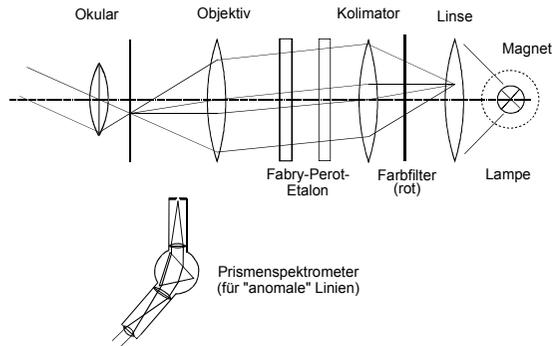
#### Apparatur und Geräte

Cd-Gasentladungslampe in einem Elektromagneten; Magnetnetzgerät. Optische Komponenten auf Dreikantschiene: Beleuchtungslinse ( $f = 200$  und  $500$  mm), *Fabry-Perot-Etalon*, Objektiv, Messokular, Farbfilter, Polarisationsfilter zur Beobachtung des normalen *Zeeman-Effekts*; Umlenkspiegel und Prismenspektroskopapparat zur Beobachtung des anomalen *Zeeman-Effekts*.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Die optische Anordnung ist in der Abbildung auf der folgenden Seite wiedergegeben. Die Cadmiumlampe L befindet sich zwischen den Polschuhen des Elektromagneten. Die Linse Lin bildet die Lampe in etwa in

den Etalon ab. Sie stellt für den Strahlengang eine flächenförmige, *sekundäre* Lichtquelle dar, aus der mit Hilfe der Kollimatorlinse Kol Parallelstrahlenbündel unterschiedlicher Neigung erzeugt werden. Die Objektivlinse Ob bildet die Interferenzringe in die Beobachtungsebene des Messokulars Ok ab. Zwischen Lin und Kol können Filter (Farbfilter, Polarisationsfilter) in den Strahlengang eingeschaltet werden.



#### Zu Aufgabe 1 (normaler Zeeman-Effekt an der roten Linien)

Für wenigstens drei Liniensysteme (Ringsysteme) werden die Lagen der Ringe ausgemessen und daraus mit (19) und (17) die spezifische Ladung des Elektrons berechnet. Berechnen Sie zweckmäßigerweise zunächst alle möglichen Differenzen ( $r^2 - r'^2$ ), wobei  $r'$  der Radius des jeweils mittleren Ringes ist. Diese Berechnungen sollen zur Kontrolle messbegleitend durchgeführt werden. Die Werte können dann untereinander verglichen und Fehler bei der Versuchsdurchführung sofort erkannt und korrigiert werden. Später wird dann ein Mittelwert (mit Fehler) dieser Differenzen gebildet, mit dem die Schlussauswertung zu  $e/m_e$  durchgeführt wird. Der Literaturwertes für  $e/m_e$  beträgt:

$$\left. \frac{e}{m_e} \right|_{Lit} = 1,7588115(24) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$$

Vergleichen Sie die Genauigkeit des Ergebnisses mit den Messungen zum Versuch *SPEZIFISCHE LADUNG DES ELEKTRONS* (sofern Sie diesen Versuch schon durchgeführt haben).

#### Zu Aufgabe 2 (Polarisationsverhalten)

Der Polarisationsfilter wird zusätzlich in den Strahlengang gebracht, und durch Drehung des Filters der Polarisationscharakter der Aufspaltungskomponenten bestimmt. Protokollieren und diskutieren Sie das Ergebnis.

#### Zu Aufgabe 3 (Linienbreite der Strahlung)

Wegen des nichtlinearen Ansprechvermögens des Auges ist die Bestimmung der Linienbreite (Halbwertsbreite) nur durch eine Abschätzung möglich. Vergleichen Sie die beobachtete Linienbreite mit dem nach (21) zu erwartenden Wert und diskutieren Sie das Ergebnis.

Berücksichtigen Sie dabei auch weitere experimentelle Einflüsse auf die Linienbreite.

#### Zu Aufgabe 4 (anomaler Zeeman-Effekt / grüne und blaue Linien)

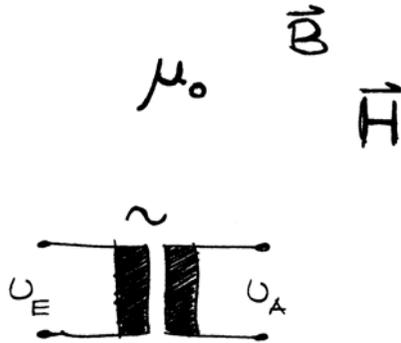
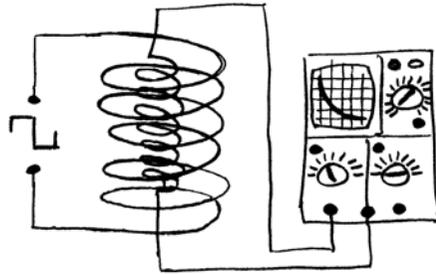
Mit Hilfe eines Spiegels kann die Brennebene des Objektivs zusätzlich in die Eintrittsebene (Spaltebene) eines Prismenspektrometers Psp verlegt werden (siehe Abbildung auf der vorhergehenden Seite). Der weit geöffnete Spalt schneidet aus dem Ringsystem für die verschiedenen Wellenlängen einen vertikalen Streifen heraus, der durch das Prisma spektral zerlegt wird. In der Beobachtungsebene des Spektrometers erscheinen Ausschnitte des Ringsystems für die verschiedenen Farben, an denen der anomale *Zeeman-Effekt* qualitativ beobachtet werden kann.

Protokollieren Sie die Beobachtungen und diskutieren Sie die Ergebnisse anhand der erwarteten Aufspaltungsbilder entsprechend der Abbildung auf Seite 7.

Berechnen Sie den  $g$ -Faktor des Grundzustandes der blauen Linie 467,8 nm.

## INDUKTION

## GP II

Stichworte

Induktionsgesetz; magnetische Induktion, magnetischer Fluss. Magnetfelder von Spulen; Selbstinduktion. R-L-Kreise, Transformator.

Ziele des Versuchs

Untersuchung von Induktionserscheinungen bei zeitabhängigen Magnetfeldern.

Literatur

[1]: Kapitel 7.3 mit 7.3.1, 7.4, 7.6.1 mit 7.6.8

[3]: Kapitel 3.4.1 mit 3.4.4, 4.1 mit 4.3

Aufgaben

1. Untersuchung der Induktionsspannung in Abhängigkeit von der Zeit an einer Probespule (Induktionsspule) innerhalb einer Magnetspule (Feldspule) bei Anlegen einer Rechteckspannung an die Feldspule. Berechnung der induzierten Spannung für  $t = 0$  und des Selbstinduktionskoeffizienten der Feldspule. Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen.
2. Messung der Induktionsspannung (Effektivwert) an der Induktionsspule bei einem Wechselstrom durch die Feldspule in Abhängigkeit von der Frequenz des Feldstroms. Qualitativer und quantitativer Vergleich des Ergebnisses mit der theoretischen Erwartung.
3. Messung der Induktionsspannung (Effektivwert) an der Induktionsspule bei einem Wechselstrom durch die Feldspule in Abhängigkeit von der Orientierung der Induktionsspule bei einer Frequenz von 100 Hz. Zusätzliche Messung der Induktionsspannung bei einer Frequenz von 1000 Hz bei der Winkelstellung  $0^\circ$ . Qualitativer und quantitativer Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Erwartungen.

Physikalische GrundlagenInduktion

Faraday entdeckte und untersuchte die Induktionserscheinungen und formulierte das Induktionsgesetz:

$$(1) \quad U_{ind} = \frac{d\phi}{dt}$$

$U_{ind}$  ist die in einer geschlossenen Leiterschleife der Fläche  $\mathbf{A}$  durch die zeitliche Änderung des *magnetischen Flusses*

$$(2) \quad \phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

induzierte Spannung. Die Einheit des Flusses ist  $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 (= 1 \text{ V s}) = 1 \text{ Wb}$  (Weber). Die Richtung von  $d\mathbf{A}$  ist bestimmt durch die Flächennormale. Der Fluss ist abhängig von den Beträgen und den Orientierungen

von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{A}$ , und es ergeben sich zwei praktische Möglichkeiten zur Erzeugung induzierter Spannungen: (1.) durch zeitliche Änderung des Betrages von  $\mathbf{B}$  bei festgehaltenem  $\mathbf{A}$  (Transformator, Selbstinduktion) und (2.) durch zeitliche Änderung der Orientierungen von  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{A}$  (des Magnetfeldes oder der Leiterschleife; Generator).

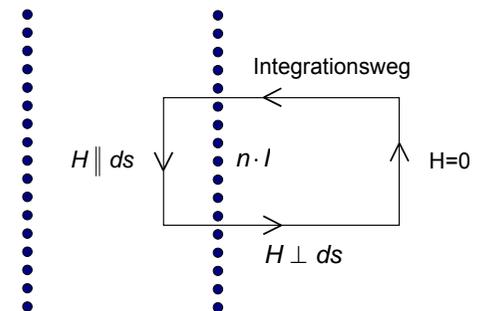
In diesem Versuch werden zeitliche Änderungen des Flusses durch Ein- und Ausschaltvorgänge (bzw. Umschaltvorgänge) und durch Wechselströme erzeugt.

Magnetfeld einer Spule

Das Magnetfeld im Innern einer im Grenzfall unendlich langgestreckten Spule lässt sich nach dem *Ampere-schen Durchflutungsgesetz*

$$(3) \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = I$$

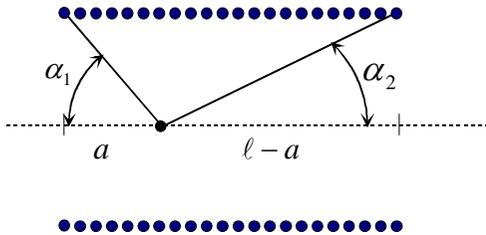
durch einen geeigneten Integrationsweg einfach berechnen (siehe Abbildung). Für einen Abschnitt der Länge  $\ell$  mit  $n$  Windungen folgt (siehe Abbildung):



$$(4) \quad H \cdot \ell = n \cdot I \quad \text{bzw.} \quad H = \frac{n}{\ell} \cdot I$$

Für eine endliche Spule der Länge  $\ell$  und dem Radius  $r$  fällt das Magnetfeld zu den Enden hin ab und es gilt auf der Spulenchse im Abstand  $a$  vom Spulende (siehe Abbildung auf der folgenden Seite):

43



$$(5) \quad H = \frac{n}{\ell} \cdot I \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2)$$

Dies Magnetfeld führt im Vakuum (und in ausreichender Näherung auch in Luft) zu einer magnetischen Induktion:

$$(6) \quad B(a) = \mu_0 \cdot H = \mu_0 \cdot \frac{n}{\ell} \cdot I \cdot \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{\ell - a}{\sqrt{r^2 + (\ell - a)^2}} \right\} \right]$$

$$(6a) \quad = \mu_0 \cdot \frac{n}{\ell} \cdot I \cdot F(a)$$

wobei der "Formfaktor"  $F(a)$  die Abweichung von der unendlich langen Spule beschreibt. (Die *magnetische Feldkonstante*  $\mu_0$  besitzt per Definition den Wert  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am). Für die Aufgabenstellungen ist es zweckmäßig, für den Bereich der Induktionsspulen der Länge  $s$  ein mittleres Feld  $\bar{B}(s)$  bzw. einen mittleren Korrekturfaktor  $\bar{F}(s)$  zu berechnen:

$$(6b) \quad \bar{B}(s) = \mu_0 \cdot \frac{n}{\ell} \cdot I \cdot \bar{F}(s)$$

mit

$$(7) \quad \bar{F}(s) = \frac{1}{s} \cdot \int_{\frac{\ell-s}{2}}^{\frac{\ell+s}{2}} F(a) \cdot da$$

Für das Integral gilt:

$$(8) \quad \int \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} da = \sqrt{r^2 + a^2} + C$$

### Selbstinduktion

Eine Leiterkonfiguration, durch die ein Magnetfeld erzeugt wird, stellt gleichzeitig eine Antenne dar, in der durch eine (selbstverursachte) Flussänderung eine Spannung induziert wird. Da das Magnetfeld proportional zum Strom ist, und eine Flussänderung (bei fester geometrischer Anordnung) nur durch eine Feldänderung erzeugt werden kann, muss ein Zusammenhang der Form bestehen:

$$(9) \quad U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Der Proportionalitätsfaktor  $L$  heißt *Selbstinduktionskoeffizient* (Induktivität) der Leiteranordnung. Für eine lange Spule mit  $n$  Windungen ist nach (1) und (6):

$$(10) \quad U_{ind} = -n \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 \cdot \frac{n^2}{\ell} \cdot A \cdot \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{\ell} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Durch Vergleich mit (9) folgt:

$$(11) \quad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{\ell}$$

Berücksichtigt man für das eigene Magnetfeld einer endlich langen Spule wieder den Korrekturfaktor (7), so ergibt sich:

$$(12) \quad L = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{\ell} \cdot \bar{F}(s)$$

### Induktion durch Ein- und Ausschaltvorgänge

In Aufgabe 1 sollen Induktionsvorgänge an einer Induktionsspule bei periodischem Umpolen der Spannung an der Feldspule untersucht werden (Anlegen einer symmetrischen Rechteckspannung). Als Ersatzschaltbild für die Feldspule wird eine Serienschaltung einer idealen Spule der Induktivität  $L$  und eines Verlustwiderstandes  $R_L$  angenommen. Die Spannungsquelle (Funktionsgenerator) habe die Leerlaufspannung  $U_G$  und einen Innenwiderstand  $R_i$ .

Aus der *Kirchhoffschen Regel* erhält man als Ansatz eine Differentialgleichung, für die sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen folgende Lösung ergibt:

$$(13) \quad I(t) = \frac{U_G}{R_L + R_i} \cdot \left[ 1 - 2 \cdot e^{-\frac{R_L + R_i}{L} t} \right]$$

Dabei wurde der Umschaltzeitpunkt von  $-U_G$  auf  $+U_G$  zu  $t = 0$  gewählt und vorausgesetzt, dass die Halbperiode lang gegen die Abklingzeit ist.

### Induktion durch Wechselfelder

Erzeugt man in der Feldspule ein magnetisches Wechselfeld durch einen Strom der Form:

$$(14) \quad I = I_0 \cos \omega t$$

so ist die induzierte Spannung zu  $I_0$  und der Frequenz  $\omega$  proportional.

### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Diskussion des Induktionsgesetzes und des Zusammenhanges zwischen  $H$  und  $B$ .

Lösung der Differentialgleichung für den Umschaltvorgang.

Angabe und Diskussion der übrigen Messgleichungen.

Apparatur und Geräte

Große Spule mit Feldwicklung (1000 Windungen) und Induktionswicklungen (125 und 250 Windungen) auf einem gemeinsamen Spulenkörper übereinander. (Die genauen Spulendaten sind im Platzskript angegeben.)

Zusätzliche Induktionsspule mit einstellbarer Orientierung (Neigespule).

Funktionsgenerator. Oszilloskop und Multimeter. Verbindungskabel.

Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Bedienung der Geräte geht weitgehend aus den Beschriftungen hervor. Beachten Sie die zusätzlichen Hinweise im Platzskript.

Zu Aufgabe 1:

Große Spule mit Feldwicklung  $n = 1000$  und Induktionswicklung  $n = 500$ . Die Anschlüsse der Wicklungen liegen an den Stirnseiten der Spule jeweils nebeneinander. Die Länge der Wicklungen beträgt  $(190 \pm 1)$  mm.

Die Feldwicklung wird direkt an den Funktionsgenerator angeschlossen (Rechteckfunktion,  $\nu \approx 100$  Hz, Amplitude  $\approx 3$  Skt).

Mit dem Oszilloskop können im Zweistrahlbetrieb an Eingang I die Generator-Klemmenspannung = Feldspulenspannung und an Eingang II die Spannung an der Induktionswicklung kontrolliert werden. Dabei sind die Einstellungen am Oszilloskop und die Amplitude und Frequenz am Funktionsgenerator so zu wählen, dass die Spannungs-Zeit-Verläufe hinreichend ausklingen, und der gesamte Bildschirm hinsichtlich Auflösung und Genauigkeit optimal ausgenutzt wird. Bei der Zeitablenkung muss darauf geachtet werden, dass der Ablenkoeffizienten kalibriert eingestellt ist (kleiner Drehknopf = cal)! Skizzieren Sie die Verläufe der Kurven im Messprotokoll qualitativ.

Bei den Abklingkurven  $U_{\text{Feld}}(t)$  und  $U_{\text{ind}}(t)$  interessieren nur die Spannungen in Bezug auf  $U_{\infty}$ . Zum Vergleich untereinander und für die quantitative Auswertung des Abklingverhaltens können dabei die beiden Kurven durch geeignete Einstellungen der y-Ablenkparameter übereinander gelegt werden. Zur Protokollierung werden die Messwerte punktweise vom cm-Raster des

Bildschirms abgelesen und in eine Messtabelle eingetragen.

Für die weiteren Auswertungen werden zusätzlich die Leerlaufspannung des Generators  $U_G$  (bei abgeklemmter Feldspule) und die Anfangs- und Endspannung  $U_0 = U(0)$  und  $U_{\infty} = U(\infty)$  an der Feldspule benötigt. Sie werden durch Differenzmessungen zwischen den positiven und negativen Halbperioden bestimmt, um die willkürlichen Lagen der Nullpunkte beim Generator (Gleichspannungs-Offset) und beim Oszilloskop zu berücksichtigen.

Messen und dokumentieren Sie die tatsächlichen Ursprungsdaten sorgfältig (Ableseungen in cm vom Bildschirm und Ablenkoeffizienten), da sich hier erfahrungsgemäß leicht Fehler einstellen. Der Gleichstromwiderstand der Feldspule  $R_L$  wird direkt mit einem Multimeter gemessen (METRA Hit 12S).

Zur Auswertung wird der gemessene Spannungs-Zeit-Verlauf einfachlogarithmisch dargestellt.  $U_{\text{ind}}(0)$  ergibt sich durch Extrapolation der Messwerte und  $L$  zusammen mit  $R_G + R_L$  (s.u.) aus dem Anstieg der erwarteten Geraden. Die Ergebnisse sind qualitativ und quantitativ mit den theoretischen Vorhersagen zu vergleichen.

Der Innenwiderstand des Funktionsgenerators  $R_G$  kann aus den beobachteten Klemmenspannungen  $U_0$  für  $t = 0$  und  $U_{\infty}$  für  $t > \infty$  mit Hilfe von (13) ermittelt werden:

$$(14) \quad U_{0,\infty} = U_G - R_G \cdot I_{0,\infty}$$

$$(14a) \quad = U_G - (R_G + R_L) I_{0,\infty} + R_L I_{0,\infty}$$

Hinsichtlich der Fehlerrechnung bei der Fehlerfortpflanzung ist es vorteilhaft, den Generatorwiderstand  $R_G$  in (14) durch  $R_L$  zu ergänzen (siehe 14a) und daraus unmittelbar "geschlossene" Ausdrücke für die benötigte Summe der Innenwiderstände  $R_G + R_L$  zu berechnen. Der Ansatz (14a) ist für beide Fälle ( $U_0$ ,  $U_{\infty}$ ) auszuwerten.

Zu Aufgabe 2:

Die große Spule mit  $n = 1000$  als Feldwicklung und  $n = 500$  als Induktionswicklung benutzen.

Zur Messung der Effektivwerte sind für die Strommessungen ein Multimeter (Votcraft 5050-DB) und für die Spannungsmessungen ein sogenanntes Millivoltmeter (Grundig MV 40) vorhanden.

Der Feldstrom soll etwa 15 mA betragen. **Achtung:** Der Feldstrom verändert sich mit der Frequenz (warum?!). Die Frequenzabhängigkeit der Induktionsspannung soll in einem Bereich bis etwa 1000 Hz gemessen werden. Stellen Sie die Messung grafisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis qualitativ und quantitativ.

Zu Aufgabe 3:

Große Spule mit  $n = 1000$  als Feldspule und zusätzliche Spule mit veränderlicher Orientierung (Neigespule) als Induktionsspule. Messungen  $U_{\text{ind}}(\alpha)$  bei 100 Hz und zusätzlich  $U_{\text{ind}}(\alpha=0)$  bei 1000 Hz.

Zur Auswertung der Messung wird  $U_{\text{ind}}$  gegen  $\cos \alpha$  grafisch dargestellt. Die Ergebnisse beider Messungen (100 Hz/1000Hz) werden qualitativ und quantitativ diskutiert.

Ergänzende Fragen

Wie hängt die Induktionsspannung von der Frequenz ab, wenn an der Feldspule nicht der Strom, sondern die Spannung konstant gehalten wird?

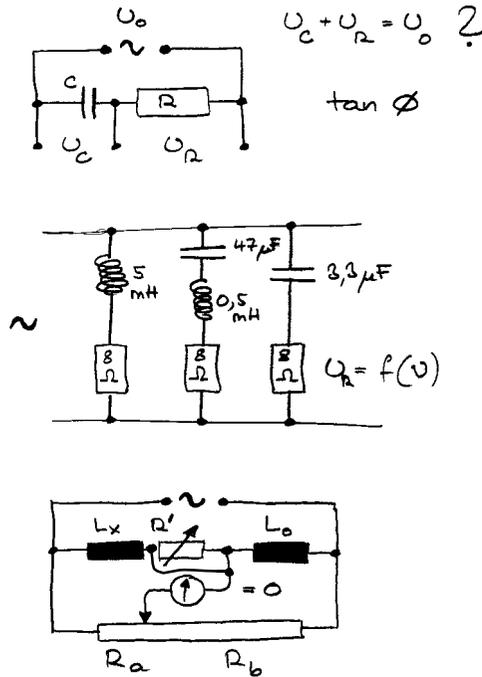
Beobachten Sie auf dem Oszilloskop die Phasenlage zwischen Feld- und Induktionsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz.

Begründen Sie, warum bei genügend hoher Frequenz die Spannungen phasengleich sind. Belasten Sie die Induktionsspule zusätzlich (niederohmig). Warum tritt jetzt auch bei hohen Frequenzen eine Phasenverschiebung auf (Energiebetrachtung).

(Die Fragen betreffen wesentlich die Physik des Transformators).

## WECHSELSTROMKREISE

## GP II

Stichworte

Wechselspannung und -strom, Impedanz (Wechselstromwiderstand). Wechselstromleistung.

Widerstandsoperatoren und komplexe Darstellung.

Serien- und Parallelschwingungskreis; Filter (Hochpass, Tiefpass); Ersatzschaltbilder.

Ziele des Versuchs

Untersuchung von Widerständen, Kondensatoren und Spulen und Kombinationen daraus in Wechselstromkreisen.

Beschreibung durch komplexe Widerstandsoperatoren und Ersatzschaltbilder.

Literatur

[1]: Kapitel 7.6.1-7.6.8

[3]: Kapitel 4.3

Aufgaben

1. Aufbau eines R-C-Kreises. Einstellung der charakteristischen Frequenz mit  $U_R = U_C$ . Messung der Generator- und der Teilspannungen und Bestimmung der Phasenverschiebung. Unabhängige Messung von  $R$  und  $C$  mit einem Multimeter und Vergleich der Beobachtungen am R-C-Kreis mit den theoretischen Erwartungen.
2. Messung des Frequenzganges  $U_R/U_G$  (Verbraucherspannung zu Generatorspannung) an einer Tonfrequenzweiche (Drei-Wege-Weiche mit R-L-Tiefpass, R-C-L-Bandpass und R-C-Hochpass) und Vergleich mit dem theoretischen Verlauf durch unabhängige Messung der Werte der Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten mit Digital-Multimetern.
3. Messung der Induktivität und des Verlustwiderstandes einer der beiden Spulen aus Aufgabe 2 mit einer Wechselstrombrücke und Vergleich mit der unabhängigen Messung (Digitalmultimeter) von  $L$  und dem Gleichstromwiderstand  $R$  der Spule.

Physikalische GrundlagenStrom und Spannung an R, C und L

Die wichtigsten passiven Bauelemente elektrischer Stromkreise sind Widerstand, Kondensator und Spule, deren modellmäßiges Verhalten durch den Widerstand  $R$ , die Kapazität  $C$  und den Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  (Induktivität) mit folgenden Zusammenhängen zwischen Spannung und Strom charakterisiert werden:

$$(1.1) \quad \text{Widerstand (R):} \quad U_R = - R I_R$$

$$(1.2) \quad \text{Kapazität (C):} \quad I_C = - C \frac{dU_C}{dt}$$

$$(1.3) \quad \text{Induktivität (L):} \quad U_L = - L \frac{dI_L}{dt}$$

$R$ ,  $C$  und  $L$  selbst sind positiv definite Größen zur quantitativen Beschreibung der spezifischen Eigenschaften der Modelle, und die Orientierungen von Spannung und Strom zueinander muss in (1.1-3) durch zusätzliche Vorzeichen (Minuszeichen) berücksichtigt werden. Der Widerstand eines Leiters bewirkt eine Gegenspannung (Spannungsabfall). Am Kondensator bewirkt ein positiver Strom eine Spannungserniedrigung, und umgekehrt. Eine Stromänderung bei einer Spule induziert eine Spannung, die der Stromänderung entgegengerichtet ist und den Strom aufrechterhalten trachtet. In der Literatur wird diese Diskussion oft nur für die Spule geführt, und das Minuszeichen in 1.3 dann explizit als *Lenzsche Regel* erwähnt.

Wechselspannung an R, C und L und Impedanz

Als Wechselspannungen bzw. Wechselströme werden zeitlich sinus- bzw. cosinusförmige Spannungen und Ströme bezeichnet:

$$(2) \quad U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{bzw.} \\ I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Wechselspannungen in Kreisen mit  $R$ ,  $C$  und  $L$  verursachen Wechselströme gleicher Frequenz (und umgekehrt), jedoch treten Phasenverschiebungen zwischen Spannung und Strom auf. Dabei kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Phase der Spannung als Bezugsphase wählen und Null setzen ( $\varphi_1=0$ ).

Als *Impedanz*  $Z$  (Wechselstromwiderstand) eines Bauteils oder einer Baugruppe wird das Verhältnis von Strom- zu Spannungsamplitude bezeichnet:

$$(3) \quad Z = \frac{U_0}{I_0}$$

Durch Einsetzen von (2) in (1.1-3) erhält man für die Impedanzen und die Phasenverschiebungen des Stroms zur Spannung an  $R$ ,  $C$  und  $L$ :

$$(4.1) \quad Z_R = R \quad \text{und} \quad \varphi = \pi$$

(Am Widerstand sind die Phasen von Spannung und Strom entgegengerichtet, und das Produkt aus Spannung mal Strom ist stets negativ entsprechend der Vorzeichenkonvention für eine abgegebene Arbeit bzw. Leistung. In der Literatur wird das Vorzeichenproblem nicht immer konsequent behandelt, und man findet auch die Darstellung, dass Strom und Spannung am Widerstand "in Phase", d.h. phasengleich sind.)

$$(4.2) \quad Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad \text{und} \quad \varphi = -\pi/2$$

(Am Kondensator "eilt der Strom der Spannung voraus".)

$$(4.3) \quad Z_L = \omega \cdot L \quad \text{und} \quad \varphi = +\pi/2$$

(An der Spule "läuft der Strom der Spannung hinterher".)

#### Wechselstromnetzwerke

Die Impedanzen und Phasen von Kombinationen von  $R$ ,  $C$  und  $L$  können analog zum Gleichstromfall unter Benutzung der *komplexen Widerstandoperatoren*  $Z$  der Bauteile berechnet werden, wobei gilt für

(5.1) Reihenschaltung:

$$Z = \left| \sum Z_i \right| \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\sum Z_i)}{\text{Re}(\sum Z_i)}$$

(5.2) Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z} = \left| \sum \frac{1}{Z_i} \right| \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}(\sum \frac{1}{Z_i})}{\text{Re}(\sum \frac{1}{Z_i})}$$

Eine ausführliche Darstellung des Formalismus der Wechselstromoperatoren ist im Skript *WECHSELSTROMOPERATOREN* im allgemeinen Teil der Versuchsanleitung zu finden.

#### Wechselstromleistung

In der komplexen Darstellung (siehe *WECHSELSTROMOPERATOREN*) ergibt sich die Wechselstromleistung aus dem Produkt der Realteile von  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{I}$ :

$$(6) \quad P = \text{Re}(\mathbf{U}) \cdot \text{Re}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U} + \mathbf{U}^*) \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{I}^*)$$

Durch Einsetzen einer Wechselspannung und eines (phasenverschobenen) Wechselstroms erhält man für das zeitliche Mittel durch das Verschwinden der periodischen Terme:

(7)

$$\bar{P} = \frac{1}{4} [U_0 I_0 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})] = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

wobei als praktische Mess- und Rechengrößen sogenannte *Effektivwerte* eingeführt werden, deren Produkt bis auf den Phasenfaktor direkt die mittlere Leistung wiedergibt. Für Wechselspannungen und -ströme ergibt sich nach (7):

$$(8) \quad U_{\text{eff}} = U_0 / \sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad I_{\text{eff}} = I_0 / \sqrt{2}$$

Ist speziell  $R = 0$ , so folgen  $\varphi = \pm \pi/2$  und  $\cos \varphi = 0$ , d.h. der Wechselstromkreis entzieht der Spannungsquelle im Mittel keine Leistung, obwohl ein Strom fließt und sich an  $C$  und  $L$  Spannungen aufbauen. Allein  $R$  entzieht dem Kreis Leistung in Form *Joulescher Wärme* (Verlustwiderstand).

#### Leistungsverluste

An idealen Kondensatoren und Spulen allein, oder an entsprechenden Kombinationen mit  $R = 0$  bzw.  $R = \infty$  ist  $\varphi = \pm \pi/2$  und  $\cos \varphi = 0$ , d.h. die Wechselstromleistung ( $U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$ ) ist im zeitlichen Mittel Null, und der Wechselstromkreis entzieht der Spannungsquelle keine Leistung, obwohl ein Strom fließt und sich an  $C$  und  $L$  Spannungen aufbauen. Allein  $R$  entzieht dem Kreis Leistung in Form *Joulescher Wärme* (Verlustwiderstand).

Reale Kondensatoren und Spulen sind dagegen nicht verlustfrei und können nicht durch  $C$  und  $L$  allein, sondern müssen durch Ersatzschaltbilder mit zusätzlichen Verlustwiderständen  $R$  beschrieben werden.

Die hauptsächlichen Ursachen für Leistungsverluste bei Spulen sind der Widerstand des Drahtes, Wirbelstromverluste in leitenden Materialien in der Nähe der Spule und Ummagnetisierungsverluste bei Spulen mit Eisen- oder Ferritkernen. Die Verluste an Kondensatoren ergeben sich aus dem endlichen Leitwert des Dielektrikums und aus dielektrischen Verlusten durch die Umpolarisierung des Mediums, die den Ummagnetisierungsverlusten bei Ferromagnetika entsprechen. Die Verluste an Kondensatoren sind jedoch vergleichsweise gering und können vielfach praktisch vernachlässigt werden.

Als *Verlustfaktor*  $d$  einer Spule oder eines Kondensators bezeichnet man den Kehrwert des Tangens des Phasenwinkels, der das Verhältnis des Verlustwiderstandes zum rein kapazitiven oder induktiven Widerstand beschreibt:

$$(9) \quad d = \frac{1}{\tan \varphi}$$

#### Ersatzschaltbilder für reale Kondensatoren und Spulen

Eine reale Spule zeigt eine experimentelle Impedanz  $Z$  (Spannungs-Strom-Verhältnis) und einen Phasenwinkel  $\varphi$ , die durch einen Modellansatz wiedergegeben werden müssen. Die einfachsten Ansätze sind eine Reihen- oder eine Parallelkombination von  $L$  und  $R$ :

Reihenersatzkombination ( $R_r$  und  $L_r$ )

$$(10.1) Z = \sqrt{R_r^2 + (\omega L_r)^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = -\frac{\omega L_r}{R_r}$$

Parallelersatzkombination ( $R_p$  und  $L_p$ )

$$(10.2) \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \frac{1}{(\omega L_p)^2}} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = -\frac{R_p}{\omega L_p}$$

Zu den beiden Ersatzschaltbildern, die die beobachteten physikalischen Umstände ( $Z$ ,  $\varphi$ ) wiedergeben sollen, gehören nicht nur verschiedene Verlustwiderstände  $R_r$  bzw.  $R_p$ , sondern auch verschiedene Induktivitäten  $L_r$  und  $L_p$ . Von einer bestimmten Induktivität einer Spule kann also nur in Verbindung mit einem bestimmten Ersatzschaltbild gesprochen werden. Auch wenn bei Spulen ein Reihen-Ersatzwiderstand und bei Kondensatoren ein Parallel-Ersatzwiderstand der Anschauung grundsätzlich besser entspricht, so sind beide Ersatzschaltbilder gleichwertig und können bei Anwendungen nach Gesichtspunkten der einfacheren Behandlung gewählt werden.

In der Praxis muss gegebenenfalls die Frequenzabhängigkeit von  $Z$  und  $\varphi$  berücksichtigt werden, die auf einer Frequenzabhängigkeit des kapazitiven und induktiven Verhaltens von Leiterkonfigurationen und der Verluste beruht, und deren genaue Darstellung zu sehr komplexen Ersatzschaltbildern führen kann.

#### Filter (Hoch-, Band-, Tiefpass)

$R$ - $C$ ,  $R$ - $L$ - und  $R$ - $C$ - $L$ -Glieder stellen frequenzabhängige Spannungsteiler dar (Filter), deren Frequenzgänge mit Hilfe der Widerstandsoperatoren berechnet werden können. Ein  $R$ - $C$ - $L$ -Bandpass ist ein schwingungsfähiges System mit einem Impedanzminimum bei Resonanz (Serienschwingungskreis; Siebkreis) bzw. einem Impedanzmaximum bei Resonanz (Parallelschwingungskreis; Sperrkreis).

#### Wechselstrombrücke

Eine Wechselstrombrücke entspricht einer *Wheatstoneschen Brücke* und ermöglicht Vergleichsmessungen von Kapazitäten und Induktivitäten (siehe Abbildung auf der Titelseite).

Abgleichbedingung ist im Fall von Wechselspannungen die Übereinstimmung der komplexen Impedanzen,

d.h. die simultane Übereinstimmung der Teilspannungen in den beiden Brückenäzweigen und der Phasen (die Verlustfaktoren der zu vergleichenden Kondensatoren oder Spulen müssen übereinstimmen).

$$(11) \quad \frac{L_x}{L_0} = \frac{R_a}{R_b} \quad \text{und(!)} \quad \frac{R_x + R'}{R} = \frac{R_a}{R_b}$$

Da die im Allgemeinen nicht gegeben ist, muss mit einem zusätzlichen *Phasenabgleichwiderstand*  $R'$  bei dem Bauteil mit dem geringeren Verlustfaktor die Phase *geschoben* werden (siehe Schaltskizze auf der Titelseite; es wurde hier angenommen, dass die zu untersuchende Spule den geringeren Verlustfaktor hat und durch einen Phasenabgleichwiderstand ergänzt werden muss).

#### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Kurze, zusammenfassende Darstellung des Formalismus der komplexen Widerstandsoperatoren zur Beschreibung von Impedanz und Phase.

Berechnung und Diskussion der Messgleichungen für die Aufgabenstellungen.

#### Apparatur und Geräte

Experimentier-Steckplattensystem (*Steckbrett*) mit verschiedenen Bauteilen (Spulen, Kondensatoren, Widerständen).

10-Gang-Wendelpotentiometer (Abgleichpotentiometer), 10-Gang-Drehwiderstand (Phasenabgleichwiderstand) und Vergleichsspule bekannter Induktivität zum Aufbau der Brücke.

Funktionsgenerator, Multimeter, Oszilloskop.

#### Versuchsdurchführung und Auswertung

Die Bedienung der Messgeräte und des Funktionsgenerators geht weitgehend aus den Beschriftungen hervor. Beachten Sie bitte die zusätzlichen Hinweise im Platzschrift.

#### Zu Aufgaben 1:

Aufbau eines  $R$ - $C$ -Kreises aus einem  $1\text{-k}\Omega$ -Widerstand und einem  $1\text{-}\mu\text{F}$ -Kondensator und einem Funktionsgenerator als Treiber (siehe Schaltskizze auf dem Titelblatt). Einstellung der Frequenz, bei der die Teilspannungen an Widerstand und Kondensator übereinstimmen (Übernahmefrequenz). Messung der Teilspannungen und der Phasenverschiebung mit dem Oszilloskop und Vergleich mit den theoretischen Erwartungen.

Achtung: Bei dem Funktionsgenerator und dem Oszilloskop liegt jeweils ein Eingangspol auf Erde, und die Aus- bzw. Eingänge können nicht frei belegt werden. Zum einen muss darauf geachtet werden, dass kein Kurzschluss über Erde entsteht. Zum anderen ergeben sich zwangsweise Messumstände, wie die Vertauschung von Polen gegenüber einem gemeinsamen "Drehsinn", die bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden müssen.

#### Zu Aufgaben 2:

Aufbau eines Filternetzwerkes (*Frequenzweiche*) entsprechend der Darstellung auf der Titelseite. Die  $8\text{-}\Omega$ -Widerstände repräsentieren Verbraucher (Lautsprecher). Zur Bestimmung des Frequenzganges werden die Generatorspannung und die Spannungen an den Verbraucherwiderständen in Abhängigkeit von der Frequenz im Bereich von  $50\text{ Hz}$  bis  $20\text{ kHz}$  (in einer geeigneten Abstufung der Messwerte) gemessen. Zu beachten ist, dass die Generatorspannung wegen des vergleichsweise hohen Innenwiderstands des Funktionsgenerators ( $50\text{ }\Omega$ ) nicht konstant bleibt. Zur Auswertung werden die gemessenen Spannungsverhältnisse (Verbraucher/Generator) als Punkte und die theoretischen Verläufe als durchgezogene Kurven über der Frequenz grafisch dargestellt, wobei für beide Achsen logarithmische Maßstäbe gewählt werden sollen.

#### Zu Aufgabe 3:

Aufbau der Schaltung entsprechend der Abbildung auf der Titelseite.

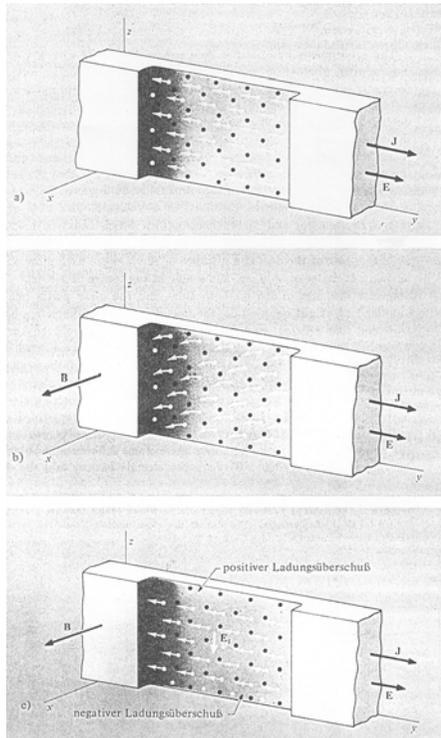
$L_x$  und  $L_o$  sind die verwendeten physikalischen Spulen, die im Ersatzschaltbild durch Reihenschaltung einer Induktivität ( $L_{x,o}$ ) und eines Verlustwiderstandes ( $R_{x,o}$ )

ersetzt werden müssen. Als Vergleichsspule  $L_o$  ist auf einem *Schaltbrettchen* eine zusätzliche Spule von 1,5 mH vorhanden.

Zum Spannungsabgleich sind ein 1-k $\Omega$ -Drehpotentiometer und zum Phasenabgleich ein 50- $\Omega$ -Drehwiderstand vorhanden. Der Abgleich wird mit dem Multimeter (PHILIPS PM 2505) kontrolliert und durch sukzessive Veränderung des Spannungs- und des Phasenabgleichs durchgeführt. Die Brücke kann praktisch nur auf eine verbleibende Restspannung abgeglichen werden, da der Funktionsgenerator Oberwellen (Verzerrungen) enthält, die nicht simultan phasenmäßig abgeglichen werden können.

## HALL - EFFEKT

## GP II

Themen und Begriffe

Elektrisches Feld; *Coulombkraft*. Magnetisches Feld; *Lorentzkraft*.

Bändertheorie; Halbleiter, Valenzband, Leitungsband, Bandlücke; Eigenleitung.

Dotierung; negative und positive Ladungsträger (Elektronen und Löcher); Störstellenleitung.

Normaler und anomaler *Hall-Effekt*.

Besondere Ziele des Versuchs

Beobachtung des *Hall-Effekts* als gemeinsame Wirkung von elektrischen und magnetischen Feldern auf bewegte Ladungsträger in Festkörpern.

Untersuchung von Leitungsmechanismen und Nachweis von Art und Konzentration der Ladungsträger in Metallen und Halbleitern.

Literatur

[1]: Kapitel 7.1.2 mit 7.1.4, 16.3.5, 16.4.1, 16.4.2

[3]: Kapitel 8.1.2, 9.1, 9.2.1, 9.2.2

Skript *HALBLEITER* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

Aufgaben

1. Beobachtung des *Hall-Effektes* an Germanium (n- oder p-Ge) als Funktion von Steuerstrom und Magnetfeld. Berechnung der *Hall-Konstanten* von Germanium. Bestimmung von Art und Konzentration der Ladungsträger.
2. Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der *Hall-Spannung* bei Germanium und Berechnung der Bandlücke.
3. Aufgabe zur gemeinsamen Durchführung: Beobachtung des *Hall-Effektes* bei Cu und Zn. Abschätzung der *Hall-Konstanten* sowie von Art und Konzentration der Ladungsträger.

Physikalische Grundlagen

Zusätzlich zu den in der Literatur behandelten Grundlagen soll auf zwei Gesichtspunkte hingewiesen werden, die oft vernachlässigt oder nicht dargestellt werden:

- Die zum *Hall-Effekt* beitragenden Ladungsträger können, je nach Material, sowohl negativ (Elektronen) als auch positiv (Löcher) sein. Das führt zu unterschiedlichen Vorzeichen der *Hall-Spannung* und der *Hall-Konstanten*  $R$ :

- Bei dotierten Halbleitern sind bei niedrigen Temperaturen die Ladungsträger der Dotierstoffe für die Leitung verantwortlich (Störstellenleitung). Durch thermische Anregung werden zusätzlich Elektronen des eigentlichen Halbleitermaterials (Wirtsgitter) vom Valenzband in das Leitungsband angehoben (Eigenleitung). Bei genügend hohen Temperaturen dominiert diese Eigenleitung gegenüber der Störstellenleitung. Im Bereich der Eigenleitung tragen wegen der unterschiedlichen Beweglichkeit der Elektronen und der Löcher praktisch jedoch nur die Elektronen zum *Hall-Effekt* bei.

Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Darstellung des *Hall-Effekts* und Herleitung der *Hall-Spannung*. Kurze Angabe und Diskussion der Temperaturabhängigkeit der *Hall-Spannung*.

Apparatur und Geräte

Platinen mit Materialproben (n-Ge, p-Ge, Cu und Zn) zum *Hall-Effekt* und verschiedenen zusätzlichen Bauteilen zur experimentellen Untersuchung.

Elektromagnet aus zwei Spulen und einem U-förmigem Eisenkern mit Polschuhen. Verschiedene Stromquellen (Netzgeräte). Digitalmultimeter und ein Mikrovoltmeter zur Messung von Strömen und Spannungen.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

Bitte die Platinen sorgfältig behandeln. Ge-Kristalle sind spröde und bruchempfindlich, und Brüche der Kristalle durch Verbiegung machen die Platinen unbrauchbar (Preis der Platinen  $\approx$  600 DM). Beim Einsetzen der Platinen in den Magneten und beim Anschluss der Kabel (Stecker) vorsichtig vorgehen. Einsteck- oder Ausziehkräfte der Bananenstecker durch Festhalten der Platinen im Steckbereich gut kompensieren.

### Beschaltung

Die Beschaltung geht aus der Leiteranordnung auf den Platinen und aus der Beschriftung hervor.

### Steuerstrom

Der Strom durch die Probe wird als *Steuerstrom* bezeichnet. Bei Halbleiter ist die Konstanthaltung des Steuerstroms von besonderer experimenteller Bedeutung, da sich der Widerstand in Abhängigkeit von der Temperatur stark ändert.

Auf den Halbleiterplatinen ist zu diesem Zweck ein Stromkonstanter eingebaut, der für einen gleichbleibenden Steuerstrom von ca. 30 mA unabhängig von der äußeren Spannung (12 bis 30 V) sorgt. Er wird durch die äußere der beiden (-)-Anschlussbuchsen für den Steuerstrom angeschlossen. Der eingebaute Stromkonstanter soll zur Messung der *Hall-Spannung* in Abhängigkeit vom Magnetfeld benutzt werden, da er einen Abgleich der Widerstands-Spannungsabfalls ermöglicht (siehe untenstehender Absatz zur *Hall-Spannung*).

Bei der Messung der *Hall-Spannung* in Abhängigkeit des Steuerstroms kann der eingebaute Konstanter nicht benutzt werden (innere der beiden (-)-Anschlussbuchsen für den Steuerstrom) und das Netzgerät für den Steuerstrom (*Voltcraft*) muss als Stromkonstanter eingesetzt werden (Spannungsbegrenzer auf Maximalwert und Strom mit Strombegrenzer einregeln). Dabei ist vorsichtig vorzugehen, so dass der Maximalwert von 50 mA für den Steuerstrom nicht überschritten wird (Netzgerät mit 200-mA-Strombegrenzung benutzen).

Bei den Metallproben wird der Steuerstrom direkt angeschlossen und darf maximal 20 A betragen.

### Hall-Spannung

Quer zur Probe wird die *Hall-Spannung* abgegriffen. Da die beiden Abgriffe für die *Hall-Spannung* aufgrund fertigungsbedingter Toleranzen nicht direkt gegenüber liegen, tritt zusätzlich zur *Hall-Spannung* ein Widerstands-Spannungsabfall auf. Um diesen zu kompensieren, wird die Spannung auf der einer Seite etwas "oberhalb" und "unterhalb" des gegenüberliegenden Punkts abgegriffen und mittels eines Potentiometers abgeglichen. Diese Nullpunktkorrektur der *Hall-Spannung* ist jeweils ohne Magnetfeld vorzunehmen.

Bei den Halbleiterproben ist diese Schaltung nur bei Benutzung des eingebauten Stromkonstanters (s.o.) wirksam. Bei direktem Anschluss des Steuerstroms zur Messung der *Hall-Spannung* in Abhängigkeit vom Steuerstrom müssen der Nullpunkt gemessen und die Messwerte rechnerisch korrigiert werden.

### Heizung und Thermoelement

Zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit sind die Proben (Platinen) zusätzlich mit einer Heizung und einem Thermoelement zur Temperaturbestimmung ausgerüstet.

### Magnet

Beim Anschluss der Magnetspulen ist auf richtige Hintereinanderschaltung der beiden Spulen zu achten. Zur Stromversorgung ist ein Netzgerät vorhanden (*Voltcraft* 0...30 V, "2-A"-Gerät).

Im Platzskript ist eine Eichkurve für das Magnetfeld im Zentrum der Polschuhe in Abhängigkeit vom Magnetstrom vorhanden; der Magnetstrom darf maximal 2 A betragen.

**Achtung:** Zur Überprüfung der Polarität der *Hall-Spannung* in Hinsicht auf das Vorzeichen der Ladungsträger ist eine sehr sorgfältige Berücksichtigung und Dokumentation der Orientierung aller experimenteller Größen (Magnetfeld aus Windungs-Drehsinn der Spulen und Richtung des Magnetstroms, Richtung des Steuerstroms bzw. Anschlusspolarität der Steuerstromquelle, Polarität der *Hall-Spannung* bzw. Anschlusspolarität des Spannungs-Messgeräts). Zur Dokumentation ist eine Skizze des Versuchsaufbaus unerlässlich, die diese

Orientierungen und Anschlüsse der Messgeräte klar erkennen lässt! Bei den Werten der *Hall-Spannung* muss das Vorzeichen protokolliert werden!

### Zu Aufgabe 1:

Als Steuerstromquelle wird ein zweites *Voltcraft*-Netzgerät ("200-mA"-Gerät) benutzt.

Für die Untersuchung der *Hall-Spannung* in Abhängigkeit des Magnetfeldes können der auf der Platine installierte Stromkonstanter (äußere (-)-Anschlussbuchse) und das Potentiometer (Drehstift) zum Abgleich des Widerstands-Spannungsabfalls benutzt werden.

Für die Messung bei veränderlichem Steuerstrom muss die innere, "direkte" Buchse angeschlossen werden; siehe dazu auch die allgemeinen Hinweise zu Steuerstrom und *Hall-Spannung* oben.

- Der Steuerstrom darf 50 mA nicht überschreiten.

Das Abgleichpotentiometer für den Widerstands-Spannungsabfall ist bei dem Anschluss ohne Stromkonstanter nicht wirksam, und zur Korrektur der Spannungswerte müssen die Spannungsabfälle für die einzelnen Steuerstromwerte bei abgeschaltetem Magnetfeld gemessen (Ausschalten des Magnetstrom-Netzgerätes am Netzschalter) und die Messwerte rechnerisch korrigiert werden.

Der Steuerstrom und die *Hall-Spannung* werden mit zwei Digitalmultimetern gemessen.

### Zu Aufgabe 2:

Zusätzlich zu der Beschaltung von Aufgabe 1 werden die Heizspannungsquelle und ein weiteres Multimeter zur Messung der Thermospannung angeschlossen, und die *Hall-Spannung* in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen.

Die Heizung wird mit 6-V-Wechselspannung betrieben, der Heizstrom beträgt dann etwa 5 A. Der Temperaturkoeffizient des Thermoelements beträgt 40  $\mu$ V/K (Temperaturdifferenz zur Raumtemperatur).

- Die Temperatur der Platinen darf 150 °C entsprechend 5 mV Thermospannung nicht überschreiten!

Die Heizung (Stufentransformator) soll intermittierend (kurzzeitiges Einschalten mit Pausen) benutzt werden, um die Aufheizgeschwindigkeit zur sicheren Kontrolle und zur zuverlässigen Aufnahme der Messwerte nicht zu groß werden zu lassen.

Die Thermospannung kann (noch) mit den Digitalmultimetern gemessen werden. Die Messgenauigkeit ist durch die geringe Auflösung (0,1 mV entsprechend 2,5 K) zwar deutlich begrenzt, kann aber im Rahmen der übrigen Messbedingungen (z.B. Temperaturgradienten) und der Zielsetzungen des Praktikums als ausreichend betrachtet werden. Bei geeigneter logarithmischer Darstellung (siehe Gleichung 1 des Skripts *HALBLEITER* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung) zeigt die *Hall-Spannung* im Bereich hoher Temperaturen (Eigenleitung) den erwarteten linearen Verlauf, aus deren Steigung sich der Bandabstand  $\Delta E$  ermitteln lässt.

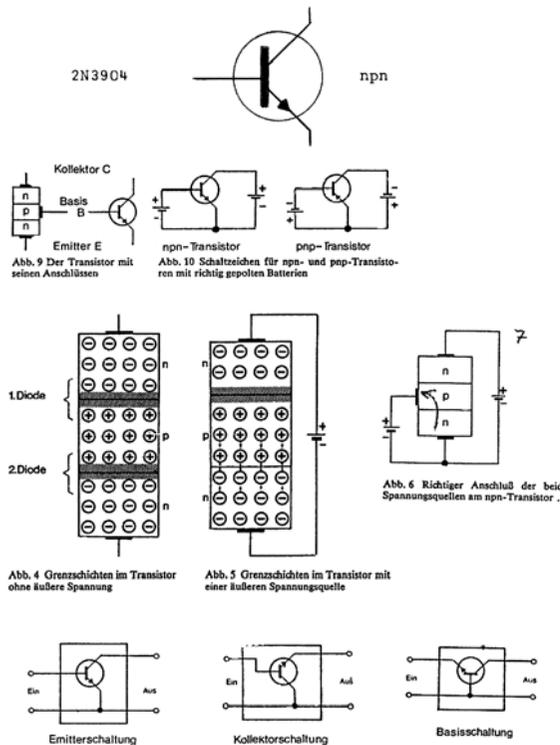
### Zu Aufgabe 3

Für die Messung des *Hall-Effektes* an den Metallproben (Kupfer) ist ein 10-A-Netzgerät für die erforderlichen hohen Steuerströme vorhanden. Die *Hall-Spannung* bleibt dennoch vergleichsweise klein und muss mit einem empfindlichen Mikrovoltmeter (*HP 3457A*) oder zum Vergleich mit dem Digitalmultimeter (*HP 3457A*) gemessen werden.

Da die Messungen an den Metallproben wegen experimenteller Schwierigkeiten (Folien mit großen Toleranzen als dünne Proben; dennoch sehr kleine Werte für die Hall-Spannung) mehr qualitativen Charakter in Hinsicht auf das Vorzeichen haben, und auch nur ein Netzgerät für hohe Ströme und ein empfindliches Mikrovoltmeter vorhanden sind, sollen die Messungen gemeinsam in der 6-er-Gruppe durchgeführt werden. Die Messungen sind jedoch von allen Einzelgruppen zu protokollieren und auszuwerten.

## TRANSISTOR

## GP II



## Stichworte

Halbleiter; Bändermodell und Leitfähigkeit; p-n-Grenzschicht, Halbleiterdiode; Transistor; Verstärkerschaltungen.

## Ziele des Versuchs

Einführung in Funktionsgrundlagen und elementare Schaltungstechniken.

## Literatur

[1]: Kapitel 16.3.5, 16.4.1 mit 16.4.3

[3]: Kapitel 9.2.1, 9.2.2, 9.2.5, 9.3.1 mit 9.3.3

Skript *HALBLEITER* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung

## Aufgaben

1. Aufnahme und Konstruktion des (statischen) Kennlinienfeldes eines npn-Transistors (2N3904) für eine angenommene Betriebsspannung (Versorgungsspannung) von 12 V. Bestimmung der Stromverstärkung für den statischen Fall.

Aufbau einer Verstärkerstufe mit einer Parallel-Gegenkopplung zur Stabilisierung.

2.1 Dimensionierung der Schaltung: Abschätzung des Arbeitswiderstandes des Basis-Vorwiderstandes.

2.2 Experimentelle Überprüfung der Kollektor-Widerstandsgeraden durch Variation des Basis-Vorwiderstandes und Bestimmung der Stromverstärkung.

2.3 Verstärkung einer Eingangs-Wechselspannung als Signal. Messung der Spannungsverstärkung und Vergleich mit der theoretischen Erwartung.

## Physikalische Grundlagen

## Funktionsgrundlagen des Transistors

Siehe Darstellungen in der Literatur und im Skript *HALBLEITER* im allgemeinen Teil dieser Praktikumsanleitung.

## Transistorschaltungen

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten einen Transistor zu betreiben. Je nachdem, ob Emmitter (E), Basis (B) oder Kollektor (C) auf dem gemeinsamen Bezugspotential der Schaltung liegen (Masse, Erde), unterscheidet man zwischen einer *Emmitter-*, *Basis-* oder *Kollektorschaltung*. Im Rahmen dieses Versuchs soll nur die Emitterschaltung behandelt werden.

## Kenngrößen und Kennlinienfelder

Ein Transistor wird durch drei Ströme und drei Spannungen beschrieben:  $I_B$ ,  $I_C$ ,  $I_E$  und  $U_{EC}$ ,  $U_{BC}$  und  $U_{EB}$ .

Die Summe der drei Ströme ist Null, wobei in den Transistor hineinfließende Ströme positiv, und herausfließende Ströme negativ gezählt werden:

$$(1) \quad I_B + I_C + I_E = 0$$

Entsprechend gilt für die Spannungen:

$$(2) \quad U_{EC} = U_{BC} + U_{EB}$$

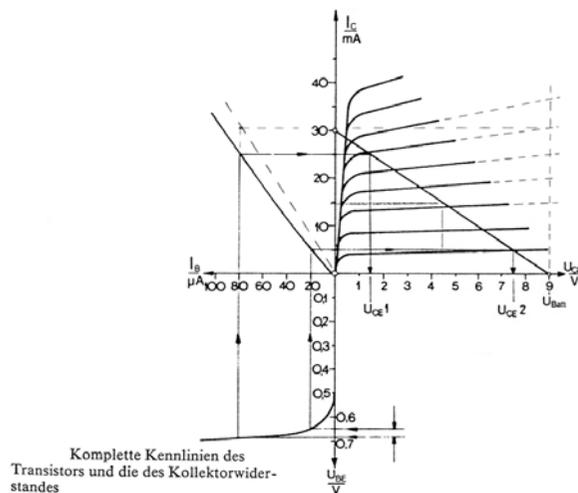
Von den sechs Variablen sind immer zwei nach (1) und (2) von den anderen vier abhängig und können durch sie ausgedrückt werden.

In der Emitterschaltung kann der Transistor zunächst als Stromverstärker aufgefasst werden, bei der eine kleine Basisstromänderung  $\Delta I_B$  eine große Kollektorstromänderung  $\Delta I_C$  verursacht. Der Stromverstärkungsfaktor und andere Kenngrößen des Transistors bzw. der Schaltung können dem sogenannten Vier-Quadranten-Kennlinienfeld entnommen werden, in dem die Abhängigkeiten der vier unabhängigen Variablen untereinander dargestellt sind.

Aus dem Kennlinienfeld lassen sich ablesen:

- Im ersten Quadranten der Ausgangswiderstand ( $U_{EC}/I_C$ ),
- im zweiten Quadranten die Stromverstärkung ( $I_C/I_B$ ),
- im dritten Quadranten der Eingangswiderstand ( $U_{EB}/I_B$ ) und
- im vierten Quadranten die Spannungsrückwirkung ( $U_{EB}/U_{EC}$ ).

(siehe Abbildung des Kennlinienfeldes auf der folgenden Seite).



Aus den Kennlinien des ersten Quadranten wird deutlich, dass die Größe des Kollektorstroms nur wenig von der Emitter-Kollektor-Spannung abhängt. Dies ist eine günstige Eigenschaft, da so ein Spannungsabfall am Verbraucher nur zu einer geringen "Gegensteuerung" der Verstärkung führt.

Der zweite Quadrant gibt die Stromverstärkung  $\beta$  wieder, die in weiten Bereichen praktisch konstant ist:

$$(3) \quad \beta = \frac{I_C}{I_B} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$$

Der dritte Quadrant entspricht im Wesentlichen einer "normalen" Diodenkennlinie in Flussrichtung; hier der Emitter-Basis-Diode.

Der vierte Quadrant beschreibt, inwiefern eine Änderung der Emitter-Kollektor-Spannung auf die Basis-Spannung rückwirkt (Spannungsrückwirkung, *Durchgriff*).

### Leistungshyperbel

Der Strom durch den Transistor führt in Verbindung mit dem nichtverschwindenden Eigenwiderstand zu einer Verlustleistung und Eigenerwärmung, die bei großen Werten zu einer Zerstörung führen kann. Die maximal zulässige Verlustleistung  $U_{EC} \cdot I_C$  (unter Vernachlässi-

gung der Basisleistung) lässt sich im Ausgangskennlinienfeld (1. Quadrant) als *Leistungshyperbel* eintragen.

### Arbeitswiderstand und Spannungsverstärkung

Bei gegebener Versorgungsspannung  $U_0$  im Kollektorkreis lässt sich der Kollektorstrom durch einen Widerstand  $R_A$  (Arbeitswiderstand) begrenzen. An dem Widerstand fällt in Abhängigkeit vom Strom ein Teil der Versorgungsspannung ab, so dass auch die Kollektor-Spannung  $U_{CE}$  begrenzt wird. Da der Spannungsabfall vom Kollektorstrom abhängt, bildet diese Grenze im Ausgangs-Kennlinienfeld eine fallende Gerade (*Kollektor-Widerstandsgerade*), die durch die beiden Punkte  $I_C = U_0/R_A$  für  $U_{EC} = 0$  (Kurzschlussfall) und  $U_{EC} = U_0$  für  $I_C = 0$  (Sperrfall) festgelegt ist.

Der Arbeitswiderstand muss so gewählt werden, dass die Widerstandsgerade die Leistungshyperbel nicht schneidet.

Mit einem Arbeitswiderstand stellt die Emitterschaltung einen einfachen Spannungsverstärker dar. Durch den Arbeitswiderstand tritt am Kollektor eine Spannungsänderung auf, die der Stromänderung proportional ist. Das Verhältnis  $\Delta U_{EB}/\Delta U_{EC}$  wird als *Spannungsverstärkung*  $v$  bezeichnet:

$$(4) \quad v = \frac{\Delta U_{EC}}{\Delta U_{EB}} = \frac{R_A \cdot \Delta I_C}{\Delta U_{EB}} \quad \left| \cdot \frac{\Delta I_B}{\Delta I_B} \right. = \frac{\beta \cdot R_A}{r_{EB}}$$

wobei  $r_{EB}$  der *differentielle Eingangswiderstand*  $\Delta U_{EB}/\Delta I_B$  ist.

Ein solcher einfacher Verstärker arbeitet invertierend, d.h. eine Spannungs- bzw. Stromerhöhung am Eingang bewirkt wegen des ansteigenden Kollektorstroms und des größeren Spannungsabfalls am Arbeitswiderstand eine Spannungserniedrigung am Ausgang.

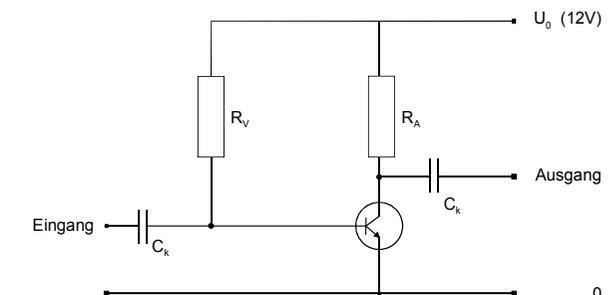
### Arbeitspunkt

Ein Transistor verstärkt nur im Bereich positiver Emitter-Basis-Ströme. Damit Wechselstromsignale unverzerrt übertragen werden können, muss der Basis ein positiver Gleichstrom überlagert werden. Der zugehörige Punkt in den Kennlinienfeldern wird als *Arbeitspunkt* bezeichnet. Als Arbeitspunkte werden oft die halben maximal zulässigen Kollektorströme bzw. die

halben Versorgungsspannungen gewählt. Der Arbeitspunkt bzw. der zugehörige Basisruhestrom kann durch einen sogenannten Basisvorwiderstand oder einen Spannungsteiler zur Versorgungsspannung hin eingestellt werden.

In den Anwendungen in Verstärkerschaltungen hat die Einrichtung eines Arbeitspunktes den Nachteil, dass auch im Ruhebetrieb ohne Signal am Eingang der Schaltung relativ hohe Ströme mit Leistungsverlusten im Kollektorkreis fließen («Class-A-Verstärker» in der HiFi-Technik).

In der folgenden Abbildung ist eine einfache Verstärkungsstufe mit einem Basisvorwiderstand  $R_V$ , einem Arbeitswiderstand  $R_A$  und zwei Koppelkondensatoren  $C_K$  dargestellt:



### Statische und dynamische Kennlinienfelder

Die oben beschriebenen Kennlinienfelder unter Annahme frei vorgegebener Variablen, z.B. der Kollektor-Emitter-Spannung  $U_{EC}$ , werden als *statische Kennlinien* bezeichnet. Durch das Einfügen eines Arbeitswiderstandes kommt es jedoch zu erheblichen Rückwirkungen der abhängigen Größe (hier des Kollektorstroms durch den Spannungsabfall am Arbeitswiderstand) auf die unabhängige Variable. Man erhält für diesen Fall sogenannte *dynamische Kennlinien*, die sich erheblich von den statischen unterscheiden können.

### Stabilisierung

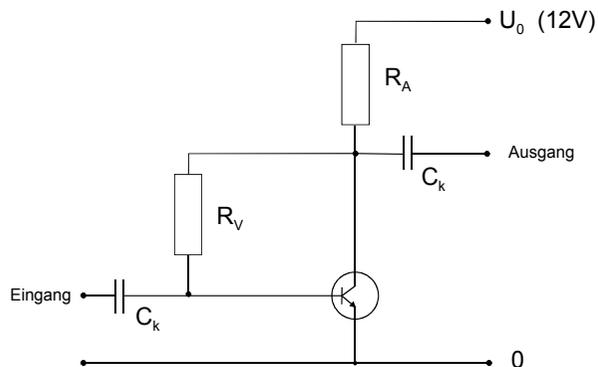
Da die Leitfähigkeit von Halbleitern stark von der Temperatur abhängig ist, muss man durch besondere Stabilisierungsmaßnahmen den Einfluss von Eigen- und Fremderwärmung auf die Eigenschaften einer

Schaltung gering halten. Die wichtigste Stabilisierungsart ist die *Gegenkopplung*. Gegenkopplung bedeutet, einen Teil des verstärkten Ausgangssignals invertiert auf den Eingang zurückzuführen, wodurch einer Veränderung des Verstärkungsverhältnisses entgegengewirkt wird. In Kauf genommen werden dabei muss eine Verringerung der Gesamtverstärkung.

Es gibt verschiedene Arten der Gegenkopplung. Welche geeignet ist, hängt vor allem vom Innenwiderstand der den Verstärker ansteuernden, vorhergehenden Stufe ab. Im vorliegenden Fall soll eine sogenannte *Parallelgegenkopplung* untersucht werden (siehe folgende Abbildung).

Nimmt die Verstärkung (bei unverändertem Eingangssignal), und damit der Kollektorstrom zu, so bewirkt dies wegen des Spannungsabfalls am Arbeitswiderstand ein Absinken des Kollektorpotentials. Da der Basisvorwiderstand  $R_V$  mit dem Emitter-Basis-Widerstand einen Spannungsteiler bildet, sinken somit auch das Basispotential und der Basisstrom, so dass der Kollektorstrom wieder herabgesetzt wird.

Das Maß der Stabilisierung wird insgesamt durch die Rückkoppelwirkung über den Basisvorwiderstand mit dem Rückkoppelverhältnis (Rückkoppelfaktor)  $\alpha = \Delta U_{EB} / \Delta U_{EC}$  und die Spannungsverstärkung  $v$  beschrieben, die die "Vorwärts"-Wirkung einer Basispotentialänderung auf das Kollektorpotential bestimmt. Beide Daten werden dabei durch die Dimensionierung der Bauteile festgelegt.



Ist  $\Delta U_{EC}'$  eine angenommene Kollektorpotentialänderung ohne Gegenkopplung, so verringert sie sich durch die Gegenkopplung auf:

$$(5) \quad \Delta U_{EC} = \Delta U_{EC}' - \alpha \Delta U_{EC} v$$

Aufgelöst nach der tatsächlichen Ausgangsspannungsänderung erhält man:

$$(6) \quad \Delta U_{EC} = \frac{\Delta U_{EC}'}{1 + \alpha v}$$

D.h., je größer der Rückkopplungsfaktor und je größer die Verstärkung, desto kleiner ist die tatsächliche Ausgangsspannungsschwankung.

### Darstellung der physikalischen Grundlagen

(zur Vorbereitung als Teil des Berichts): Zusammenfassende Darstellung der Funktion des Transistors. Beschreibung und Diskussion des Kennlinienfeldes und der untersuchten Schaltungsbeispiele.

### Apparatur und Geräte

Experimentierplatine (Steckbrett) mit Transistor und weiteren Bauelementen (Widerstände, Potentiometer).

Netzgerät 12 V; Batterie (1,5-V-Monozelle) für Basisstrom, verschiedene Multimeter.

### Versuchsdurchführung und Auswertung

#### Allgemeine Hinweise

Der offene Aufbau der Schaltungen und die gleichzeitige hohe Auflösung der Digitalmultimeter haben eine gewisse Instabilität der Messwerte mit Zahlensalat zur Folge, was lästig, aber unvermeidlich ist. Im Rahmen der dabei möglichen Genauigkeit sollte nicht übermäßig penibel versucht werden, "glatte" Werte bei den Messvariablen einzustellen.

Die Grenzdaten des Transistors sind sorgfältig zu beachten (siehe Platzskript), um Überlastungen und eine Zerstörung des Transistors zu vermeiden.

Andererseits sind während der Messungen die Messdaten kritisch quantitativ zu beobachten (Größenord-

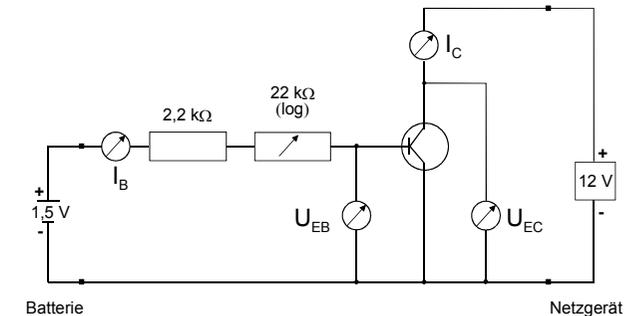
nung, qualitatives Verhalten, relative Stabilität), um rechtzeitig einen zerstörten Transistor zu erkennen.

### Zu Aufgabe 1

Die Schaltung wird entsprechend der folgenden Abbildung aufgebaut. Achten Sie auf einen geeigneten Einsatz der zur Verfügung stehenden Messgeräte (Auflösung) und insbesondere auf spannungsrichtige Messungen im Basis- und im Kollektorkreis. Protokollieren Sie die Schaltung und den Einsatz der Messgeräte.

Kontrollieren Sie für jede Messeinstellung die Verlustleistung ( $U_{EC} I_C$ ), um Überlastungen zu vermeiden.

Protokollieren Sie die Messdaten, und fertigen Sie zur Kontrolle eine messbegleitende grafische Darstellung an.



Es werden vier Datensätze ( $I_C$  und  $U_{EB}$  in Abhängigkeit von  $U_{EC}$ ) mit  $I_B = 30, 60, 90$  und  $120 \mu A$  als Parameter aufgenommen. Der zweite und der dritte Quadrant des Kennlinienfeldes sollen für eine angenommene Versorgungsspannung von 12 V konstruiert werden. Aus dem zweiten Quadranten wird die statische Stromverstärkung  $I_C/I_B$  berechnet, und aus dem dritten Quadranten der differenzielle Eingangswiderstand  $r_{EB}$ . Die Bestimmung von  $r_{EB}$  kann dabei wegen der kleinen Spannungsdifferenzen und der Schwankung der Daten ungenau sein, und der Wert nur grob abgeschätzt werden.

### Zu Aufgabe 2.1

Ein kleiner Arbeitswiderstand verursacht kleine Spannungsabfälle und ist ungeeignet zur Spannungsverstärkung. Ein zu großer Arbeitswiderstand könnte  $U_{EC}$  zu weit absinken lassen und damit strombegrenzend wirken. Eine geeignete *Ruhe*spannung  $U_{EC}$  liegt bei der halben Versorgungsspannung der Schaltung (d.h. hier

6 V). Der Arbeitswiderstand  $R_A$  berechnet sich dabei aus dem erforderlichen Spannungsabfall am Arbeitswiderstand und dem Ruhestrom  $I_C$  am Arbeitspunkt, und der Basisvorwiderstand  $R_V$  aus  $U_{EC}$  abzüglich der Basis-Schwellspannung und dem Basis-Ruhestrom  $I_B$  am Arbeitspunkt.

### Zu Aufgabe 2.2

Die Verstärkerschaltung wird gemäß der Schaltskizze auf Seite 3 mit den vorgehend ermittelten Werten für  $R_A$  und  $R_V$  aufgebaut, und für eine Versorgungsspannung von 12 V die Kollektor-Widerstandsgerade ( $U_{EC}/I_C$ ) durch Variation des Basis-Vorwiderstandes gemessen. Dabei muss für die Auswertung der genaue Wert des Arbeitswiderstandes gemessen werden.

Tragen Sie die Messwerte ( $U_{EC}/I_C$ ) zusammen mit der erwarteten Widerstandsgeraden in das Kennlinienfeld ein. Konstruieren Sie die dynamische  $I_B/I_C$ -Kennlinie und berechnen Sie daraus die dynamische Stromverstärkung.

### Zu Aufgabe 2.3

Die Schaltung wird durch zwei 0,1- $\mu$ F-Koppelkondensatoren ergänzt (siehe Schaltskizze auf Seite 3), und auf den Eingang ein Sinus-Signal (etwa 1000 Hz) aufgeprägt (Funktionsgenerator *Voltcraft* 7202). Das Signal ist am Funktionsgenerator geeignet abzuschwächen (Abschwächer ATT-20-dB-Drucktaste /Attenuator/).

Der Eingangskreis mit dem Koppelkondensator und der Emitter-Basis-Widerstandsstrecke stellt bei dieser Schaltung einen R-C-Kreis, und damit einen frequenzabhängigen Spannungsteiler dar (Hochpass).

Beobachten Sie zunächst das Eingangssignal am Koppelkondensator und an der Basis des Transistors und das Ausgangssignal auf dem Oszilloskop (Span-

nungsverhältnis und Phasenlage in Abhängigkeit von der Frequenz). Protokollieren Sie die Beobachtungen. Wählen Sie versuchsweise einen größeren Basisvorwiderstand und vergrößern Sie das Eingangssignal.

Bestimmen Sie zum Schluss die Spannungsverstärkung durch Messung der Eingangs- und Ausgangsspannung mit dem HC-5050-DB-Multimeter.

## Anlage I FEHLERRECHNUNG

## GP II

Alle realen Daten tragen unbestimmte zufällige und systematische Abweichungen, die als *Fehler* bezeichnet werden, und sind verteilt. Die Erhebung von Daten (Messungen, Berechnungen) stellen grundsätzlich Schätzungen dar, die durch

(1) Intervalle

wiedergegeben werden müssen (Intervallschätzungen, *Fehlerintervalle*; inhaltlich zutreffender, aber unüblich *Ergebnisintervalle*)!

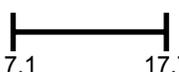
Die Fehlerintervalle ermöglichen signifikante, schließende Vergleiche [siehe (28-30)], die mit singulären Zahlenwerten nicht gegeben sind, und

(2) die Angabe von Zahlenwerten allein ist unwissenschaftlich!

Diese Zusammenfassung enthält grundlegende Elemente und Methoden der Fehlerrechnung; eine ausführlichere Darstellung ist in der Anleitung zu Teil I des Grundpraktikums zu finden (GP I).

### Darstellung und Eigenschaften der Fehlerintervalle

Die übliche Schreibweise für Fehlerintervalle in der Physik und Messtechnik besteht aus dem (zufälligen) Mess- oder Ergebniswert als *Zentralwert* des Fehlerintervalls und dem Fehler als *Intervallradius*:

(3) 
 $(17,4 \pm 0,3)$  Maßeinheiten = 

(4) Die Fehlerintervalle sind als homogen zu betrachten!

d.h. der zentrale Mess- oder Ergebniswert hat kein höheres Gewicht als jeder andere Wert des Intervalls auch!

Mathematisch-statistisch ist die *Standardabweichung* als Fehlermaß vereinbart, so dass Fehlerintervalle mit einer

(5) statistischen Wahrscheinlichkeit von (lediglich) 68 % ( $\approx 2/3$ )

den Erwartungswert der betreffenden Größe erfassen, und demzufolge eine *Irrtumswahrscheinlichkeit* von (immerhin) 32 %  $\approx 1/3$  verbleibt.

### Protokollierung und Notation

(6) Sämtliche Daten sind in der Form (3) zu notieren!

Ausnahmen sind dort möglich, wo es Gruppen von Daten gibt, die übereinstimmende Fehler tragen (wie Spalten oder Zeilen in Tabellen), oder deren Fehler sich aus gemeinsamen Sekundärangaben berechnen (wie Messdaten von elektrischen Multimetern). Die Fehler oder diese Angaben sind direkt bei den Daten zu notieren.

Oft tragen situationsbedingte oder subjektive Umstände zur Fehlerabschätzung bei, die dann zum Verständnis für Dritte im Messprotokoll zu dokumentieren sind.

Auch *Fehler tragen Fehler*, wobei die Genauigkeit der Fehlerwerte im allgemein weit unter der der Größen selbst bleibt und eher von der Größenordnung eines Faktors 2 anzunehmen ist. Fehler dürfen deshalb nur

(7) mit einer signifikanten Stelle

angegeben werden (z.B.  $\delta l = 2\%$  und nicht 1,3725...%), wobei die

(8) Fehler stets aufzurunden sind,

um (5) nicht zu verletzen (d.h.  $\delta l = 2\%$  und nicht 1% bei dem vorhergehenden Beispiel)!

Abweichend von (7) sollen abgelegte und später wieder aufgenommene Fehler von

(9) Zwischenwerten zweistellig

protokolliert werden, um eine Akkumulation von Rundungsfehlern zu vermeiden (d.h.  $\delta l = 1,4\%$  in obigem Beispiel, wenn  $\delta l$  zur späteren Widerstandsberechnung notiert wird).

(10) Die Zahlwörter von Ergebnis und Fehler müssen in der gleichen Stelle enden!

Eine höhere oder geringere Zahlenauflösung wäre inkohärent und würde nichtsignifikante Genauigkeit vortäuschen oder vorhandene Aussage unterdrücken; also  $R = (1,70 \pm 0,03) \text{ k}\Omega$  und nicht  $R = (1,7027 \pm 0,03) \text{ k}\Omega$  oder  $R = (1,7 \pm 0,03) \text{ k}\Omega$ .

### Fehlerbeiträge bei Messgrößen

Die Fehlerbeiträge der Messwerte können grob drei Kategorien zugeordnet werden:

(11) 
*Statistischer Fehler (Streufehler)*  
*Praktische Schätzfehler*  
*Nennfehler*

### Stichprobenschätzung und Streufehler

Bei einer signifikanten Streuung können eine *Messreihe* als Stichprobe aufgenommen und Ergebnis und Fehler mathematisch-statistisch berechnet werden.

Als *Ergebnis* wird der (einzelne) Mittelwert der Messreihe herangezogen:

(12) 
 Ergebnis  $x = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

Der *Fehler* als Standardabweichung der Verteilung dieser Mittelwerte wird durch die Standardabweichung der Grundverteilung der Einzelwerte und durch den Umfang der Stichprobe bestimmt (statistisches Gewicht):

(13) 
 Fehler  

$$\Delta x = \sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

(Der Nenner n-1 berücksichtigt den Näherungscharakter bei der Berechnung von  $\sigma(x)$  aus einer Stichprobe).

### Praktischer Schätzfehler

Ist das Auflösungsvermögen eines Messverfahrens deutlich geringer als die Standardabweichung, so wird eine Streuung nicht beobachtet. Dann muss als *praktischer Schätzfehler* ein

(14) Fehler nach praktischen Maßgaben unter kritischer Berücksichtigung aller Umstände (Ablesung, Anzeige) abgeschätzt werden.

Nennfehler (Gerätefehlerangabe)

Aufgrund des Funktionsprinzips und der Bauart zeigt jedes Messgerät typische, meist systematische Abweichungen, die vom Gerätehersteller in den Unterlagen angegeben werden müssen. Diese Fehler werden hier als *Nennfehler* bezeichnet.

Kontrollmessung und Messfehler bzw. Messergebnis

- (15) Zur Feststellung des Streuverhaltens müssen jede Messung oder Messeinstellung wiederholt und auch das Ergebnis dieser Kontrollmessung protokolliert werden!

Kontinuierlich oder periodisch arbeitende Messverfahren (Multimeter als Beispiel) enthalten eine Messwiederholung implizit.

- (16) Bei einer signifikanten Abweichung ist die Größe durch eine Messreihe zu untersuchen und nach (12) und (13) auszuwerten.

- (17) Wird der Wert im Rahmen des Auflösungsvermögens reproduziert, muss ein Fehler praktisch geschätzt werden.

- (18) Der gesamte Messfehler ergibt sich dann aus der Summe nach (24) des Streu- oder Schätzfehlers und dem Nennfehler, wobei das Prinzip nichtbeitragender Fehler (24) berücksichtigt werden kann.

Fehlerfortpflanzung

Für statistisch unabhängige Größen gilt das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz*:

- (19) 
$$z = f(a, b, \dots) \quad \text{mit}$$

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \dots}$$

Für die elementaren Rechenverknüpfungen folgt daraus mit den *absoluten Fehlern*  $\Delta x$  bzw. den *relativen Fehlern*  $\delta x$ :

- (20) 
$$z = a \pm b \quad \text{mit} \quad \Delta z = \sqrt{\Delta^2 a + \Delta^2 b}$$

(21) 
$$z = a^{\times} b \quad \text{mit} \quad \delta z = \sqrt{\delta^2 a + \delta^2 b}$$

(22) 
$$z = a^r \quad \text{mit} \quad \delta z = r \delta a$$

(23) speziell 
$$z = \frac{1}{a} \quad \text{mit} \quad \delta z = \delta a \quad \text{und} \quad \Delta z = \frac{\Delta a}{a^2}$$

Die Rechenbeziehungen (20) und (21) mit der Wurzel aus der Summe der Quadrate führen dazu, dass auf den jeweiligen Verknüpfungsebenen kleinere Fehlerbeiträge als

(24) nichtbeitragende Fehler vernachlässigbar

im Rahmen der übrigen Aufrundungen sind. Ein Fehler ist als klein zu betrachten, wenn es vergleichbare Fehler gibt, die diesen um das Dreifache oder mehr übertreffen.

Sind Korrelationen zwischen Größen gegeben oder anzunehmen, muss das *Maximal-Fehlerfortpflanzungsgesetz* herangezogen werden:

(25) 
$$\Delta_{\max} z = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b \right| + \dots$$

Fehlerabschätzung bei der grafischen Auswertung von Funktionen

Bei der grafischen Auswertung linearer oder linearisierter Funktionen wird neben der Ausgleichsgeraden (Bestgerade) eine Grenzgerade eingetragen, die noch mit den Messwerten verträglich ist, und die zugehörigen Grenzwerte der Parameter berechnet (Grenzachsenabschnitte  $a^{\pm}$ , Grenzanstieg  $m^{\pm}$ ). Die Fehler sind dann die Differenzen zu den Ausgleichswerten:

(26) 
$$\text{Achsenabschnitt} = (a \pm \Delta a) \quad \text{mit} \quad \Delta a = |a^{\pm} - a|$$

(27) 
$$\text{Anstieg} = (m \pm \Delta m) \quad \text{mit} \quad \Delta m = |m^{\pm} - m|$$

Es ist ausreichend, eine der beiden möglichen Grenzgeraden zu betrachten. Die Grenzgerade soll die Ausgleichsgerade etwa in der Mitte der Punktwolke

schneiden (eine parallele Grenzgerade ist ungeeignet, da sie den Achsenabschnitt nicht variiert).

Die Lage der Grenzgeraden muss sich an der Streuung der Punkte und zusätzlich an den expliziten Einzelfehlern der Punkte orientieren.

Bei logarithmischen Darstellungen sind die Ausgleichsgerade und die Grenzgerade schwerpunktmäßig an die größeren y-Werte mit den im (Allgemeinen) kleineren relativen Fehlern anzupassen.

Bei der subjektiven Festlegung der Grenzgeraden bleibt typischerweise die Anzahl der Messpunkte als statistisches Gewicht unberücksichtigt, so dass die Fehler zu groß abgeschätzt werden.

Schließender Vergleich

Ein Vergleich bildet im Sinne eines *statistischen Tests* die kontinuierliche Menge der Ergebnisintervalle auf die diskrete Menge von drei Aussagen ab:

- (28) Ergebnisse sind als gleich zu bewerten, wenn die Intervalle überlappen oder sich erreichen.
- (29) Ergebnisse sind verträglich, wenn die dreifachen Intervalle überlappen oder sich erreichen.
- (30) Ergebnisse sind (erst dann) signifikant unterschiedlich, wenn (28) oder (29) nicht zutreffen.

## Anlage II He-Ne-LASER

GP II

Physikalische Grundlagen und Funktionsweise des  
Helium-Neon-Lasers

### Elektronische Zustände; spontane Emission und Absorption

Physikalische Systeme befinden sich am Temperaturnullpunkt normalerweise im Grundzustand, d.h. dem Zustand geringster Energie. Die Elektronen des Systems besetzen dabei die tiefsten Niveaus, wobei die Besetzungszahlen für diese Niveaus sich aus quantenmechanischen Regeln ergeben. Durch Zufuhr von Energie (thermische Anregung, Absorption von Photonen, Stoßprozesse, etc.) können energetisch höher liegende Zustände besetzt werden. Die angeregten Zustände sind grundsätzlich nicht stabil und zerfallen spontan zu tiefer liegenden Zuständen (*spontane Emission*; vergleiche auch Versuche *OPTISCHE SPEKTROSKOPIE*, *RADIOAKTIVER ZERFALL* und *GAMMA-SPEKTROSKOPIE*). Der Übergang erfolgt in den meisten Fällen unter Aussendung von Lichtquanten (Photonen) mit einer für den Übergang charakteristischen Wellenlänge bzw. Frequenz. Die mittlere Verweilzeit in den angeregten Zuständen (Lebensdauer) ist dabei ebenfalls eine die Zustände kennzeichnende Größe. Die Untersuchung der Strahlung erlaubt Rückschlüsse auf die emittierenden Systeme (Spektroskopie).

Befindet sich ein solches System in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Strahlungsfeld (z.B. Licht), so finden neben den Emissions- auch Absorptionsprozesse statt. Dabei kann sich ein stationärer Gleichgewichtszustand einstellen, bei dem Emission und Absorption mit gleicher Rate erfolgen. Im thermischen Gleichgewicht mit dem Strahlungsfeld hängen die Besetzungszahlen der Zustände von der Temperatur und der Anregungsenergie  $E_i$  der jeweiligen Zustände ab und folgen einer Boltzmannverteilung der Form  $\exp(-E_i/kT)$ . In die genaue Verteilung gehen zusätzlich quantenmechanische Gewichtsfaktoren ein, sogenannte *g-Faktoren*.

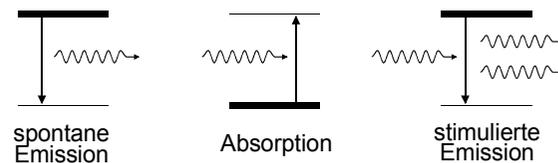
Als Beispiel ergibt sich für einen Zustand mit einer Übergangswellenlänge zum Grundzustand von 500 nm bei Raumtemperatur eine relative Besetzungszahl von etwa  $10^{-43}$ . Bei einer Teilchendichte von  $6 \cdot 10^{23}$

Atomen pro Mol ist die Anzahl angeregter Atome damit praktisch gleich Null. Bei 2400 K, der Temperatur einer Lampenglühwendel, steigt die relative Besetzung auf etwa  $10^{-5}$

### Stimulierte Emission

Sind in dem Strahlungsfeld Frequenzen vorhanden, die mit Übergangsfrequenzen zwischen Zuständen des Systems übereinstimmen, so tritt neben der spontanen Emission, die unbeeinflusst von dem Strahlungsfeld abläuft, als zusätzlicher Emissionsprozess sogenannte *stimulierte* (oder *induzierte*) *Emission* auf, bei der ein Übergang vom angeregten Zustand zu einem tiefer liegenden Zustand durch ein passendes Photon des Strahlungsfeldes ausgelöst wird.

Das durch stimulierte Emission erzeugte Photon besitzt exakt die gleichen Eigenschaften wie das auslösende Photon, d.h. es trägt die gleiche Frequenz, Ausbreitungsrichtung, Polarisation und Phase. Bei spontan emittierten Photonen ist eine solche Übereinstimmung untereinander nicht gegeben.



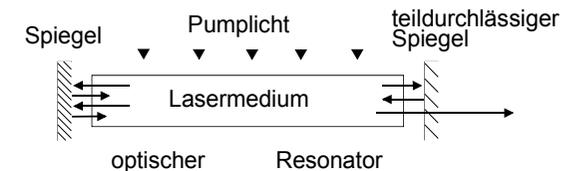
### Das Laserprinzip

Wird durch irgendeinen Prozess eine derartige Abweichung der Besetzung vom thermodynamischen Gleichgewicht erreicht, dass der angeregte Zustand stärker besetzt ist als ein betrachteter tiefer liegender Zustand (*Besetzungsinversion*), so werden durch stimulierte Emission mehr Photonen erzeugt als durch Absorption vernichtet. Man erhält eine Verstärkung des Strahlungsfeldes und spricht von einem *Laserprozess* (LASER = light amplification by stimulated emission of radiation). Ein Laser ist ein Gerät, das Licht mit Hilfe stimulierter Emission von Strahlung verstärkt.

Ein Laser besteht aus einem Lasermedium, in meist länglicher Form, in dem ein Laserübergang bis zur Besetzungsinversion angeregt wird. Die Anregung ("*Pumpen des Laserübergangs*") kann bei Festkörpern

und Flüssigkeiten optisch durch Beleuchtung mit intensiven Blitzlampen oder mit einem weiteren "*Pump-laser*" erfolgen, oder bei Gasen durch Elektronenstoßanregung in einer in dem Lasermedium gleichzeitig brennenden Gasentladung.

Um die Photonendichte des Strahlungsfeldes zu erhöhen, wird dem Laser ein Rückkopplungsmechanismus zugefügt. An den Stirnflächen des Lasermediums werden Spiegel angebracht, so dass ein *optischer Resonator* entsteht, der das Strahlungsfeld selektiv anreichert (*Fabry-Perot-Resonator*; siehe auch Versuch *FABRY-PEROT-ETALON*). Durch das Prinzip der optischen Vielstrahlinterferenz ist die Linienbreite eines solchen optischen Resonators um ein Vielfaches geringer, als die der Laserresonanz selbst, so dass der Resonator darüber hinaus eine Feinselektion bezüglich Frequenz, Ausbreitungsrichtung, Polarisation und Phase bewirkt. Ein Teil der so erzeugten Strahlung kann ausgekoppelt werden, indem einer der Endspiegel teildurchlässig gemacht wird.



Eine tatsächliche Verstärkung durch stimulierte Emission kann nur dann erfolgen (das Medium nur dann *lasen*), und der optische Resonator nur dann stationär schwingen, wenn die Zahl der durch stimulierte Emission erzeugten Photonen die der Verluste ausgleicht (Schwellbedingung). Verluste entstehen durch die Auskopplung, aber auch an den Spiegeln und den Grenzflächen des Lasermediums, und vor allem infolge von *Selbstabsorption* innerhalb des Lasermediums. Die Inversion des Niveaus muss daher umso größer sein, je höher diese technischen und physikalischen Verluste sind.

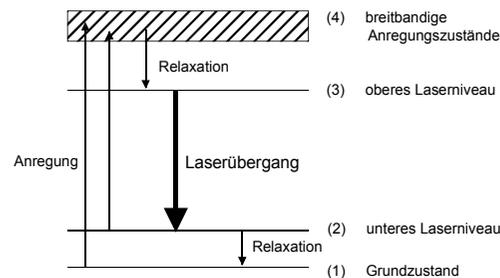
### Strahlungscharakteristik

Die Laserstrahlung zeichnet sich durch geringe Linienbreite, hohe Kohärenz, hohe Linienintensität (hohe spektrale Dichte) und eine sehr ausgeprägte Richtungscharakteristik aus. Um die hohe Linienintensität des Lasers deutlich zu machen, sei folgendes Beispiel

erläutert: Ein Photon im sichtbaren Bereich repräsentiert etwa  $10^{-19}$  J an Energie. Eine Laserausgangsleistung von 1 mW ergibt dann rund  $10^{16}$  Laserphotonen pro Sekunde. Die Bandbreite der Strahlung beträgt etwa  $10^5$  Hz. Um mit einer thermischen Lichtquelle diese Linien-Strahlungsleistung zu realisieren, müsste die Temperatur der Quelle  $10^{15}$  K betragen! Zum Vergleich: Die Temperatur im Sterninneren liegt bei etwa  $10^8$  K.

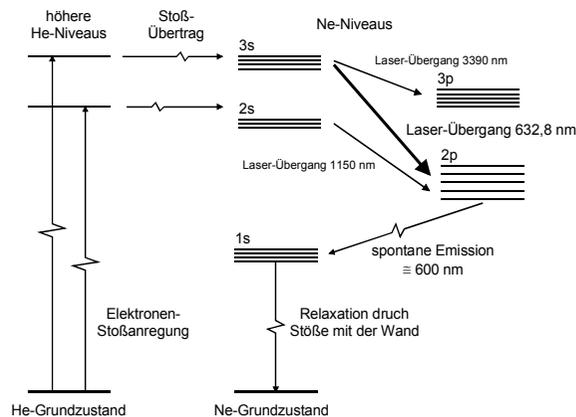
### Der He-Ne-Laser

Der He-Ne-Laser ist ein sogenannter *Vier-Niveau-Laser*, dessen Funktionsprinzip an folgendem Term-schemata nachvollzogen werden kann.



Durch einen Anregungsprozess wird eine Reihe eng benachbarter, höherer Niveaus (4) besetzt, die durch spontane Emission und strahlungslose Übergänge zum Niveau (3), dem oberen Laserniveau, relaxieren. Zwischen (3) und (2) findet der Laserübergang statt. Auch das untere Laserniveau (2) ist nicht stabil und relaxiert weiter zum Grundzustand (1). Bedeutsam für die Funktion ist die Besetzung des oberen Laserniveaus über die Zwischenzustände (4), die breitbandig mit hoher Effizienz angeregt werden können, und die Instabilität des unteren Laserzustands (2), wodurch dieser ständig entleert wird und so für die notwendige Inversion zwischen (3) und (4) sorgt. Ein solcher Vier-Niveau-Laser erfordert aus den geschilderten Gründen keine hohe Pumpleistung und lässt sich ohne großen technischen Aufwand realisieren.

Die folgende Abbildung zeigt schematisch einige Termgruppen und Übergänge des He- und des Ne-Atoms.



In einer Gasentladung werden durch Elektronen-Stoßanregung verschiedene Zustände des Heliums besetzt. Aufgrund quantenmechanischer Übergangsregeln sind optische Übergänge zum Grundzustand des He nicht erlaubt, und eine Rückkehr in den Grundzustand findet durch Stöße und Energieübertrag mit Neon-Atomen statt, für die wegen der energetisch benachbart liegenden 2s und 3s Niveaus im Ne eine hohe Wahrscheinlichkeit besteht. In dem vereinfachten Vier-Niveau-Schema entspricht die Anregung des Heliums dem Schritt von (1) nach (4) und dem Stoß-übertrag der Schritt von (4) nach (3).

Die rote Linie des He-Ne-Lasers liegt bei 632,8 nm. Es finden auch Laserprozesse bei den anderen Wellenlängen statt, die aber durch die Bauart des Resonators im Allgemeinen unterdrückt werden. Dem Relaxationsprozess von (2) nach (1) entspricht beim He-Ne-Laser ein zusammengesetzter Prozess. Im ersten Schritt erfolgt durch spontane Emission ein Übergang in einen Zwischenzustand. Von diesem Niveau aus relaxieren die Ne-Atome über Stöße mit der Wand in den Grundzustand.

Der Vorteil dieses relativ komplizierten Laserzyklus liegt in der sehr effizienten Anregung der He-Atome in der Gasentladung. Es gibt auch reine Ne-Laser, die jedoch weit weniger wirkungsvoll arbeiten. Der He-Ne-Laser ist der erste im kontinuierlichen Betrieb realisierte Laser und gehört bis heute zu den zuverlässigsten und am häufigsten eingesetzten Lasertypen.

Der erste Betrieb eines Lasers gelang 1960 *H.Maiman* mit einem Rubinlaser. Der erste Gaslaser wurde 1961 von *A.Javan*, *W.R.Bennett* und *D.R.Herriott* realisiert.

### Aufbau eines He-Ne-Lasers

Die Abbildung auf der folgenden Seite zeigt die typischen Elemente eines He-Ne-Lasers

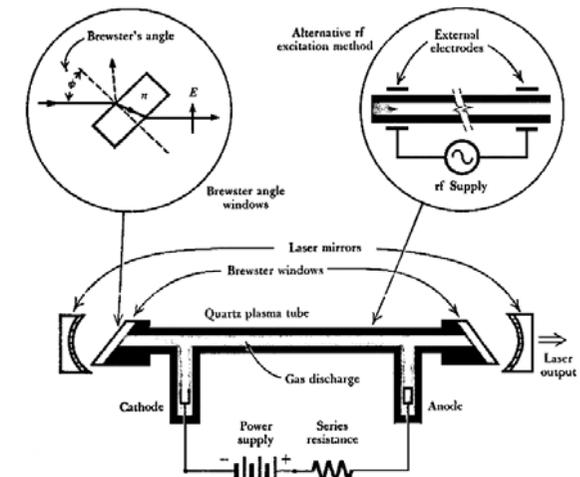


FIG. 1-33 The essential elements in a gas laser are the plasma tube, the laser mirrors, and the power supply. The gas discharge may be obtained with internal electrodes, or with external rf electrodes (upper right). The Brewster-angle windows transmit vertically polarized light with zero surface reflections (upper left).

In einem Quarzrohr (100-1000 mm Länge, einige mm Durchmesser) brennt in einem He-Ne-Gasgemisch (etwa 10 % He) eine Gasentladung. Die Endfenster des Quarzrohres stehen unter dem *Brewster-Winkel*, um Reflexionsverluste beim vielzähligen Hin- und Hergang der Strahlung gering zu halten. Zwei externe, konfokale Spiegel bilden den optischen Resonator. Der eine Spiegel besitzt einen möglichst hohen Reflexionsgrad. Der andere Spiegel ist teildurchlässig, um die Strahlung auszukoppeln. Bei einer Anregungsleistung von 5-10 W liegt die Laser-Ausgangsleistung bei 0,5 -50 mW. Die Bandbreite der Laserstrahlung beträgt etwa  $10^5$  Hz bzw.  $10^7$  nm.

Anlage III STROMLEITUNG
----------------------------

GP II
-------

Die Beschreibung der Stromleitung in Festkörpern erfolgt im Rahmen der Festkörperphysik durch quantenmechanische Vorstellungen. Einige wesentliche Aspekte sollen hier phänomenologisch und qualitativ ausführlicher dargestellt werden, da das Thema einen Vorgriff auf den Stoff späterer Vorlesungen darstellt.

### Atom

Bei freien Atomen bewirkt der positiv geladene Kern eine Potentialmulde, in der im neutralen Fall sämtliche Elektronen des Atoms fest gebunden sind. Analog zu den diskreten Schwingungsfrequenzen einer beidseitig eingespannten Saite führt die räumliche Begrenzung der Elektronen auf das Atomvolumen dazu, dass nur ganz bestimmte Zustände mit diskreten Energien und Drehimpulsen eingenommen werden können (*Bohrsches Atommodell*). Zustände mit unterschiedlichem Drehimpuls, aber eng benachbarten Energien, werden zu Schalen zusammengefasst (Hauptquantenzahlen). Nach dem *Pauli-Prinzip* darf jeder Zustand nur mit (höchstens) einem Elektron besetzt werden, so dass mit steigender Kernladungszahl  $Z$  immer höhere Schalen aufgefüllt werden. Die am schwächsten gebundenen Elektronen in der äußersten Schale (d.h. die mit der höchsten Energie) bestimmen den chemischen Charakter des Elements (*Leuchtelektron*). Das Periodensystem der Elemente in der Anordnung mit steigendem  $Z$  spiegelt diese Schalenstruktur wieder.

### Elektronen in Festkörpern

Bei der Kondensation von Atomen zu einem Festkörper (z.B. Kupfer mit  $Z=29$  zu Cu-Metall) können sich die Potentiale benachbarter Atome deformieren und soweit überlappen, dass der höchste besetzte Zustand oberhalb der einzelnen Potentialmulden liegt. Damit sind die Elektronen in diesem Zustand nicht mehr an das Atom gebunden, und zurück bleiben  $\text{Cu}^+$ -Ionen und die ungebundene Elektronen als sogenanntes *Elektronengas*. Die Bildung eines derartigen Elektronengases hoher Dichte (etwa ein Elektron pro Atom, d.h. etwa  $10^{29} \text{ m}^{-3}$  für Kupfer) ist das Kennzeichen eines Metalls. Typische metallische Eigenschaften, wie z.B. die hohe elektrische und thermische Leitfähigkeit

und das große Absorptions- und Reflexionsvermögen für Licht, sind Eigenschaften dieses Elektronengases. Allerdings sind die Elektronen nicht uneingeschränkt frei, sondern ihre Beweglichkeit unterliegt weiter dem Pauli-Prinzip, so dass Ortsveränderungen nur durch Platzwechsel auf freie Zustände erfolgen können.

### Bandstruktur

Durch den Überlapp der Potentiale benachbarter Atome werden die Elektronen auf den äußeren Bahnen gekoppelt, und es entsteht eine Aufspaltung (Vermehrung) der möglichen Zustände analog der Aufspaltung der Eigenfrequenzen gekoppelter Pendel. Für einen Festkörper mit einer sehr großen Zahl von  $N$  gekoppelten Atomen liegen die Zustände so dicht beieinander, dass man sie für viele Betrachtungen als quasi kontinuierlich verteilt ansehen kann und von einem (*Energie-*) *Band* spricht. Atomare Zustände, die sich nur durch die Orientierung des Drehimpulses unterscheiden, bilden gemeinsame Bänder. Grundsätzlich sind jedoch auch die Zustände in den Bändern diskret und können, entsprechend dem Pauli-Prinzip, nur mit je einem Elektron besetzt sein, wobei die Anzahl der Zustände in einem Band gleich der Zahl der beteiligten Zustände pro Atom mal der Anzahl der Atome  $N$  ist. Zwischen den Bändern können *Bandlücken* (verbotene Zonen) liegen.

### Leiter

Die äußeren Elektronen von Kupfer sind s-Elektronen mit zwei Drehimpulsorientierungen, so dass es  $2N$  Leitungsband-Zustände gibt, die von den  $N$  Leitungselektronen (eins je Atom) also gerade zur Hälfte aufgefüllt werden. Derartige nicht vollständig besetzte Bänder werden als Leitfähigkeits- oder kurz *Leitungsband* bezeichnet, weil in diesen freie Plätze (Zustände) vorhanden sind, über die eine einseitige Elektronenbewegung, und damit ein Ladungstransport stattfinden kann.

Die Elektronen in den höchsten besetzten Bandzuständen an der *Fermigrenze* besitzen relativ hohe kinetische Energien mit Geschwindigkeiten von etwa  $10^6 \text{ m/s}$  (bei rein klassischer Betrachtungsweise eines Elektronengases würde dies einer Temperatur von  $10^5 \text{ K}$  entsprechen). Daran gemessen ist die zusätzliche Beschleunigungsenergie durch ein äußeres elektrisches Feld vergleichsweise klein, so dass nur die

"obersten" Elektronen in freie Zustände angehoben werden und zum Ladungstransport beitragen können. Alle anderen dagegen (99% bei Zimmertemperatur) verbleiben in ihren Zuständen und tragen nicht zum Ladungsstrom (und auch nicht zum Wärmetransport und zur Wärmekapazität) bei.

### Nichtleiter

Werden pro Atom genau so viele Elektronen freigesetzt (delokalisiert), wie Zustände in einem Band enthalten sind, so wird das Band vollständig gefüllt. Es gibt keine freien Zustände, und damit ist eine Aufnahme elektrischer Feldenergie und eine elektrische Leitung nicht möglich; der Festkörper ist ein Isolator. Derartige vollständig besetzte Bänder heißen *Valenzbänder*.

### Halbleiter

Liegt das nächsthöhere, leere Band nur in geringem Energieabstand über dem gefüllten Valenzband, so können durch thermische Anregung Elektronen aus dem Valenzband über die Bandlücke  $\Delta E$  gehoben werden, und das leere Band wird zum Leitungsband. Zusätzlich hinterlassen die angehobenen Elektronen Lücken (*Löcher*) im Valenzband, also freie Zustände, so dass auch darin ein Ladungstransport möglich wird. Die Substanz wird zum Halbleiter (genauer *Eigenhalb-leiter* oder intrinsischer Halbleiter). Nach allgemeinen Gesetzen der Thermodynamik wird der Bruchteil der angehobenen Elektronen durch den Boltzmannfaktor  $e^{-E_G/kT}$

( $k$  = Boltzmannkonstante) bestimmt. (Wie groß ist dieser Faktor für Germanium mit  $E_G = 0,6 \text{ eV}$  bei Zimmertemperatur?).

### Störstellenhalbleiter (Dotierung)

Die spezifische Leitfähigkeit ist proportional zur Ladungsträgerdichte, bei einem intrinsischen Halbleiter also exponentiell mit der Temperatur wachsend. Höhere und bei Raumtemperatur praktisch konstante Ladungsträgerdichten erhält man durch *Dotierung* mit Atomen anderer Wertigkeit. Durch die Fremdatome entstehen besetzte Zustände in der Bandlücke des Halbleiters dicht unterhalb des Leitungsbandes bzw. freie Zustände dicht oberhalb des Valenzbandes, die ein zusätzliches Elektron abgeben (*Donatoren*) oder

aufnehmen (*Akzeptoren*) können, und die wegen ihrer geringen Anregungsenergie bereits bei Zimmertemperatur vollständig angeregt bzw. besetzt sind.

#### Elektrischer Widerstand

Die Stromleitung in einem Metall und dessen elektrischer Widerstand lassen sich in einfacher Näherung klassisch verständlich machen. Wird an dem Metall durch Verbinden mit einer Spannungsquelle ein elektrisches Feld erzeugt, so versetzt dies die freien Elektronen in beschleunigte Bewegungen, die durch Stöße mit den Ion-Rümpfen immer wieder unterbrochen werden. Es stellt sich eine im statistischen Mittel gleichförmige Bewegung mit einer mittleren Driftgeschwindigkeit ein, die proportional zur Spannung ist, und die sich aus der Teilchenzahldichte, der Ladung und der Stromdichte berechnen lässt. Aus diesem Bild folgt das *Ohmsche Gesetz* mit  $R = \text{const}$ .

Dies klassische Bild besitzt aber Grenzen, und erst die Quantenmechanik erklärt, wie sich Elektronen in einem räumlich periodischen Potential ohne Streuung bewegen können, d.h. ohne (wie klassisch zu erwarten) mit den Atomrümpfen zusammenzustoßen. Ein ideal aufgebautes Metallgitter ohne Störungen der Periodizität durch Fremdatome oder durch thermischen Schwingungen der Ionen (am Temperatur-Nullpunkt) hat danach keinen elektrischen Widerstand (dies ist nicht die Supraleitung).

Bei Zimmertemperatur ist die mit der Temperatur zunehmende thermische Bewegung als Ursache für den Widerstand dominierend, der beim Abkühlen auf sehr tiefe Temperaturen für reine Metalle typisch um einen Faktor 100 sinkt. Der schließlich temperaturunabhängige Restwiderstand ist ein Maß für die Reinheit des Materials. Bei Legierungen dagegen kann der Fehlstellenbeitrag so groß werden, dass er schon bei Raumtemperatur überwiegt. Dies Verhalten erklärt den hohen spezifischen Widerstand von z.B. Manganin und Konstantan und dessen geringe Temperaturabhängigkeit.

#### Supraleitung

Grund der Supraleitung ist nicht die Verringerung der thermischen Schwingungen bei tiefen Temperaturen als eine der Ursachen des Widerstands, sondern eine Zustandsänderung des Elektronengases durch Bildung

sogenannter *Cooper-Paare* durch eine sehr schwache Phononen-Austauschwechselwirkung zwischen Elektronen entgegengerichteten Spins, wobei sich die elektronischen Eigenschaften grundlegend ändern und die Gitterstörungen als Ursachen des Widerstands von den Elektronen nicht mehr wahrgenommen werden.

Im Normalzustand unterliegen Elektronen als Spin-1/2-Teilchen der Fermi-Statistik und sind als kleine Teilchen zu verstehen, die im Wellenbild eine kurze (de-Broglie-) Wellenlänge besitzen. Durch die Kopplung werden die Cooper-Paare spinlos. Sie folgen dann der Bose-Einstein-Statistik und nicht mehr dem Pauli-Prinzip, und können einen einheitlichen, *kohärenten* Zustand bilden, der sich durch eine große de-Broglie-Wellenlänge auszeichnet. In diesem Zustand nehmen die Elektronen die thermischen Gitterschwingungen der Atomrümpfe und auch Gitter-Fehlstellen als räumlich kleine Störungen nicht mehr wahr, und es kommt zu dem Effekt des verschwindenden Widerstands.

Die Kopplung zu Cooper-Paaren ist in einem Elektronengas innerhalb eines Gitters möglich, da dort die Coulomb-Wechselwirkung durch die allseitige Umgebung mit gleich geladenen Teilchen nahezu völlig ausgeschaltet ist, und unterhalb einer bestimmten Temperatur (der Sprungtemperatur), wenn auch die thermischen Phononen ausreichend abgeschwächt sind. Die innere Energie des Metalls ist dann umso kleiner, je mehr Cooper-Paare gebildet werden, so dass sie den energetisch günstigsten Zustand des Systems darstellen. Es handelt sich dabei um eine Phasenänderung des Systems, die nicht in Abhängigkeit der Temperatur verläuft, sondern sprunghaft, und bei der sich die Entropie des Systems unstetig ändert.

Anlage IV WECHSELSTROMOPERATOREN	GP II
-------------------------------------	-------

Für Kombinationen von  $R$ ,  $C$  und  $L$  können die resultierenden Wechselspannungen und -ströme grundsätzlich durch Ansatz der *Kirchhoffschen Regeln* und Lösung der entstehenden Differentialgleichungen berechnet werden. Die allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen sind komplexe Exponentialfunktionen, und für den wichtigen Fall harmonischer Erregung (inhomogene Differentialgleichungen mit  $\sin/\cos$  als aufgeprägte Funktionen) ergibt sich ein einfacher Lösungsformalismus durch komplexe Ansätze von Spannung und Strom.

#### Komplexer Ansatz von Wechselspannung und -strom

Korrekt müssten Spannung und Strom als physikalisch reelle Größen durch eine Kombination komplexer Größen geschrieben werden, wobei man jedoch die gleichen Ergebnisse bei Ansatz einfacher komplexer Funktionen erhält (im Folgenden **fett** geschrieben). Die Spannung wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit ohne konstanten Phasenanteil geschrieben, während der Strom gegenüber der Spannung um  $\varphi$  phasenverschoben angesetzt wird:

$$(1.1) \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

$$(1.2) \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

#### Spannung und Strom an $R$ , $C$ und $L$

Die Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom an  $R$ ,  $C$  und  $L$  sind gegeben durch (siehe Skript *WECHSELSTROMKREISE*):

$$(2.1) \text{ Widerstand (R):} \quad U_R = -R I_R$$

$$(2.2) \text{ Kapazität (C):} \quad I_C = -C \frac{dU_C}{dt}$$

$$(2.3) \text{ Induktivität (L):} \quad U_L = -L \frac{dI_L}{dt}$$

#### Reihenschaltung von $R$ , $C$ und $L$

Für eine *Masche* (Reihenschaltung) von  $R$ ,  $C$  und  $L$  mit einer aufgeprägten Treiberspannung (Generator) liefert die *Kirchhoffsche Regel* für die Summe der Spannungen mit (2) und (1):

$$(3) \quad \left[ R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L \right] I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = U_0 e^{i\omega t}$$

bzw.

$$(4) \quad \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi} = \mathbf{Z} = \left[ R - i \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \right]$$

Der Ausdruck (4) stellt eine *komplexe Impedanz* dar, die die Lösung vollständig mit dem Betrag als physikalischer Impedanz und der Phase beschreibt:

$$(5.1) \quad Z = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}$$

und

$$(5.2) \quad \tan\varphi = \frac{1}{\omega C} - \omega L$$

#### Parallelschaltung von $R$ , $C$ und $L$

Für einen *Knoten* (Parallelschaltung) von  $R$ ,  $C$  und  $L$  mit einem aufgeprägten Treiberstrom (Generator) erhält man entsprechend aus der *Kirchhoffsche Regel* für die Summe der Ströme mit (2) und (1):

$$(6) \quad \left[ \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} \right] U_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

bzw.

$$(7) \quad \frac{I_0}{U_0} e^{i\varphi} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \left[ \frac{1}{R} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]$$

Jetzt folgen als physikalische Impedanz und Phase:

$$(8.1) \quad \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$$

und

$$(8.2) \quad \tan\varphi = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}$$

#### Komplexe Widerstandsoperatoren

Aus (3) und (6) kann abgelesen werden, dass die Berechnung komplexer Impedanzen denselben Regeln wie bei der Kombination von Widerständen im Gleichstromfall folgt, wenn an Stelle der Widerstände die folgenden *komplexen Widerstandsoperatoren* eingesetzt werden:

$$(9.1) \quad \mathbf{Z}_R = R$$

$$(9.2) \quad \mathbf{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$$

$$(9.3) \quad \mathbf{Z}_L = i\omega L$$

Als Kombinationsregeln für Serien- bzw. Parallelschaltung gelten entsprechend:

$$(10.1) \text{ Serienschaltung:} \quad \mathbf{Z}_{\text{gesamt}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2$$

$$(10.2) \quad \text{Parallelschaltung:} \quad \frac{1}{\mathbf{Z}_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}$$

#### Phasenverschiebung

Bei der Diskussion von Phasenverschiebungen muss der mehrdeutige Verlauf der  $\tan^{-1}$ -Relation berücksichtigt werden. Aus  $\tan\varphi = 0$  für ein Netzwerk ohne Kapazität und Induktivität folgt mathematisch  $\varphi = \pm n\pi$ . Physikalisch zutreffend sind aber nur die Lösungen mit ungeradem  $n$ , für die  $\cos\varphi = -1$  ist, weil das System über den Widerstand Energie abgibt. Ebenso sind für Kombinationen von  $R$ ,  $C$  und  $L$  nur die Lösungen korrekt, für die  $\cos\varphi$  negativ ist, d.h.  $\varphi > 90^\circ$  oder  $\varphi < -90^\circ$ .

Anlage V  
HALBLEITER

GP II

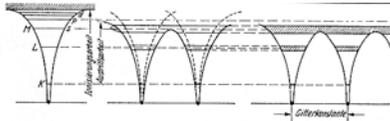


Abb. 14.50. Wenn die Einzlatome einander näherkommen, überlagern sich nicht nur ihre Potentiale zu einer Galerie von Rundbögen, sondern die ursprünglich scharfen Elektronenzustände verbreitern sich. Im rechten Teilbild ist rechts die Atomkette fortgesetzt zu denken, links liegt die Kristalloberfläche. Dort kann man auch die Austrittsarbeit für die Elektronen ablesen

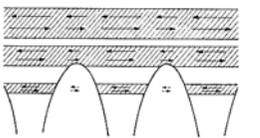


Abb. 14.51. Elektronenbänder im periodischen Potentialgebirge. Die Pfeile deuten die Beschleunigungsrichtung der Elektronen im äußeren Feld an. Die effektive Masse wechselt ungefähr in der Bandmitte ihr Vorzeichen

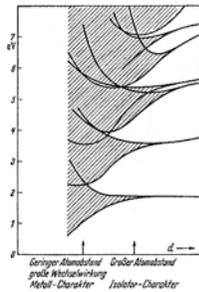


Abb. 14.52. Mit abnehmender Gitterkonstante  $d$  verbreitern sich die Elektronenzustände. Aus einem Isolator kann man durch hinreichende Kompression einen metallischen Leiter machen und umgekehrt (Rechnungen von Slater nach der Methode des selbstkonsistenten Feldes von Hartree-Fock). (Aus W. Finkelsberg)

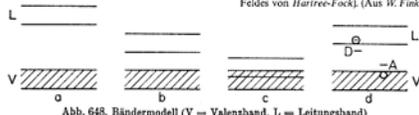


Abb. 648. Bändermodell (V = Valenzband, L = Leitungsband)  
a) eines isolierenden Kristalls (großer Bandabstand)  
b) eines Halbleiters ohne Störstellen mit Eigenleitung (kleiner Bandabstand)  
c) eines Zerkalkmetalls (überlappende Bänder)  
d) eines Halbleiters mit zwei verschiedenen Störstellen (A = Akzeptor, D = Donator)  
Dieses Bändermodell ist stark vereinfacht. In Wirklichkeit ist die Breite der verbotenen Zone nicht konstant, sondern wird von der Gitterstruktur beeinflusst. Deshalb wird bei genauerer Betrachtung die Energie in Abhängigkeit vom Wellenvektor  $k$  aufgetragen. Die Richtung des Wellenvektors ist die Richtung der Wellenfortpflanzung des Elektrons.

## Themen und Begriffe

Stromleitung in Halbleitern, Bändermodell; p-n-Grenzschichten (p-n-Übergänge); Halbleiterdiode, Transistor.

## Literatur

/1/ Bergmann-Schaefer; Lehrbuch der Experimentalphysik, Band IV, Teil 1; de Gruyter Berlin New York 1975

## Physikalische Grundlagen

## Bändermodell und Stromleitungsmechanismus in Halbleitern

Bei gebundenen Atomen treten infolge der Wechselwirkung mit den Nachbarn Verbreiterungen und Aufspaltungen der elektronischen Niveaus auf, die bei Molekülen zu komplizierten Bandenspektren und bei Festkörpern (Kristallen) schließlich zu quasikontinuierlichen *Energiebändern* führen, die von zustandsfreien, sogenannten "*verbotenen Zonen*" unterbrochen sind (siehe Abbildung auf der Titelseite).

Die Elektronen der inneren Schalen der Atome sind weiterhin an die jeweiligen Atomkerne gebunden (Atomrümpfe als Ionen). Die Bänder dagegen stellen eine Eigenschaft des gesamten Festkörpers dar. Die Elektronen in diesen Zuständen sind nicht lokalisiert und können sich unter Umständen quasi frei in dem Festkörper bewegen.

Auch die Bänder unterliegen, genau wie die diskreten atomaren Niveaus, dem *Pauli-Prinzip*, und können nur mit einer bestimmten, größten Anzahl von Elektronen besetzt werden. Voll besetzte Bänder können damit in einem äußeren elektrischen Feld keine weitere Energie aufnehmen, und ein einseitiger Ladungstransport und Strom als Träger von Bewegungsenergie bleibt ausgeschlossen (es bleiben aber Ortsveränderungen von Ladungen durch Platzwechsel möglich). Begrifflich bezeichnet man das oberste vollbesetzte Band in einem Festkörper, das nicht zur Leitfähigkeit beitragen kann, als *Valenzband*, und das nächst höhere teilbesetzte oder leere Band als *Leitungsband*.

## Eigenleitung

Isolatoren und Halbleiter sind Festkörper mit leeren Leitungsbandern. Bei Isolatoren ist die verbotene Zone zwischen Valenz- und Leitungsband sehr groß ( $> 2$  eV), so dass bei Raumtemperatur entsprechend der Boltzmannverteilung für die thermische Anregung praktisch keine Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband übergehen. Bei Halbleitern ist die verbotene Zone kleiner (0,56 eV bei Germanium), und schon bei Raumtemperatur wird ein zwar kleiner, aber merklicher Anteil von Elektronen durch thermische Anregung aus dem Valenzband in das Leitungsband angehoben. Diese Elektronen ermöglichen eine Leitfähigkeit

des Festkörpers, die als *Eigenleitung* bezeichnet wird.

Bei dieser Eigenleitung hinterlässt jedes Elektron im Leitungsband ein Loch im Valenzband ("*Defektelektronen*"), und die Dichten  $n$  dieser quasifreien Elektronen und  $p$  der Löcher sind gleich groß. Nach einer schwierigeren Rechnung, die im Rahmen des Praktikums nicht durchgeführt werden kann (siehe /1/, S. 674 ff) erhält man dabei als Abhängigkeit von der Temperatur:

$$(1) \quad n(T) \text{ bzw. } p(T) \propto T^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$$

wobei  $\Delta E$  der Abstand zwischen Valenz- und Leitungsband ist.

(Bei Metallen kommt es zu einem teilweisen Überlapp zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband, so dass sich das Leitungsband unabhängig von der Temperatur bis zu einer bestimmten Höhe mit Elektronen auffüllt).

## Störstellenleitung

Durch den Einbau geeigneter Fremdatome in einen Kristall, z.B. von drei- oder fünfwertigen Atomen in ein vierwertiges Wirtsgitter, entsteht ein sogenannter *Störstellenhalbleiter*.

Ein überschüssiges fünftes Elektron eines Fremdatoms (*Donator*, z.B. As) wird in einem vierwertigen Gitter nicht durch die Nachbaratome gebunden, und es genügt bereits ein geringer Energieaufwand, um dieses Elektronen von dem Atom abzulösen. Im Term-schema befinden sich diese Elektronen in Niveaus dicht unterhalb des Leitungsbandes, von dem aus sie schon bei Raumtemperatur praktisch vollständig in dieses angehoben werden, und dort als negative, bewegliche Ladungsträger zur Verfügung stehen (*n-Halbleiter*).

Bei einem dreiwertigen Fremdatom (*Akzeptor*, z.B. Ga) kann die vierte Bindung der Nachbaratome des Wirtsgitters nicht abgesättigt werden. Es ist eine Fehlstelle mit einer Energie dicht oberhalb des Valenzbandes vorhanden, die bereits bei Raumtemperatur durch thermische Anregung besetzt wird. Im Valenzband bleibt ein Defektelektron (Loch) zurück, das als quasi-

freie positive Ladung für einen Ladungstransport zur Verfügung steht (*p-Halbleiter*).

### p-n-Grenzschicht

(Siehe dazu folgende Abbildung). Stehen eine n- und eine p-Schicht in Kontakt miteinander, so diffundieren aufgrund der thermischen Bewegung an der Grenze Elektronen in das p-Gebiet und umgekehrt Löcher in das n-Gebiet. Sie treffen dort auf ihre jeweiligen komplementären Teilchen, mit denen sie zu neutralen Atomen rekombinieren. In der Grenzschicht entsteht ein Verlust an Ladungsträgern, wodurch sich in dem ursprünglich neutralen Material im n-Gebiet eine positive und im p-Gebiet eine negative Raumladung ausbildet, die mit dem dadurch entstehenden elektrischen Feld der Diffusion entgegenwirkt. Als Ergebnis stellt sich ein thermisches Gleichgewicht ein, bei dem der Diffusions- und der Feldstrom gleich groß sind.

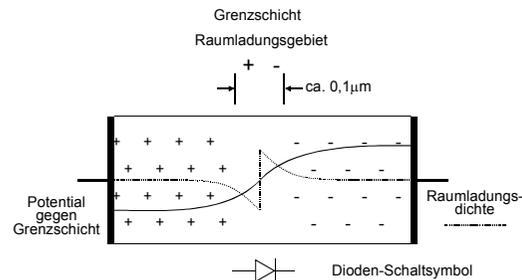


Abbildung p-n-Grenzschicht und Halbleiterdiode

Durch die Rekombination verarmt die Grenzzone an Ladungsträgern und bildet in dem Festkörper eine hochohmige *Sperrschicht*.

Durch Anlegen einer äußeren Spannung wird, je nach Polarität, die Sperrschicht durch weiteren Abzug von Ladungsträger verbreitert (*Sperrrichtung*), oder durch Überfluten mit Ladungsträgern gleicher Polarität abgebaut, so dass auch der Übergang leitfähig wird (*Durchlassrichtung*).

### Halbleiterdiode

Eine solche Grenzschicht lässt bei Anlegen einer äußeren Spannung einen Stromfluss nur in einer Richtung zu. Legt man die äußere Spannung mit (+) an n und (-) an p, so werden weitere Ladungsträger aus

den jeweiligen Gebieten abgezogen, und die Sperrschicht verbreitert sich; die Diode ist in *Sperrrichtung* geschaltet. Polt man die äußere Spannung umgekehrt mit (-) an n und (+) an p, so werden der n- und p-Bereich von außen mit artigen Ladungsträgern überflutet, wodurch die Raumladungsbarrieren und die Sperrschicht abgebaut werden; die Diode ist in *Flussrichtung* geschaltet und leitet (siehe Abbildung auf Seite 4).

Die Funktion des Stromes in Abhängigkeit von der äußeren Spannung heißt Kennlinie der Diode. Im Rahmen einer allgemeinen Herleitung aus dem Bändermodell ergibt sich (*Shockley-Diodengleichung*):

$$(2) \quad I = I_s \left( e^{\frac{e}{kT} U} - 1 \right)$$

wobei  $I_s$  der praktisch konstante Strom in Sperrrichtung ist (Sperrstrom). Der Exponentialquotient  $e/kT$  wird als *Temperaturspannung* bezeichnet.

Experimentelle Kennlinien, insbesondere für Si oder GaAs, weichen z.T. von der *Shockley*-Beziehung ab und zeigen typischerweise ein Durchschalten in Flussrichtung erst ab einer bestimmten *Schwelspannung* oder auch zwei Bereiche mit unterschiedlichen Exponentialkoeffizienten (bzw. unterschiedlichen Anstiegs in der logarithmischen Darstellung).

### Transistor:

Ein Transistor besteht aus einer dreifachen Halbleiterschichtfolge (p-n-p oder n-p-n), d.h. aus zwei "gegeneinander" geschalteten Dioden. Es gibt keine grundsätzlichen Unterschiede zwischen einer pnp- und einer npn-Schichtfolge. Jedoch werden aus technischen Gründen vor allem npn-Transistoren hergestellt, weshalb dieser Typ im Folgenden dargestellt werden soll. Die drei Schichten bzw. Anschlüsse eines Transistors führen die Namen *Emitter*, *Basis* und *Kollektor* (siehe nebenstehende Abbildung).

Legt man bei einem npn-Transistor eine äußere Spannung mit (-) an den Emitter und mit (+) an den Kollektor, so fließt zunächst kein Strom wegen der Sperrschicht im Basis-Kollektor-Übergang. Mit einer zusätzlichen, positiven Spannung an der Basis ist die Emitter-Basis-Diode aber in Durchlassrichtung geschaltet

und es treten Elektronen aus dem Emitter in den Basisbereich ein. Ist die Basisschicht hinreichend dünn, so fließt aber nur ein kleiner Teil dieser Elektronen auch über den Basiskontakt ab. Der größte Teil dagegen diffundiert weiter in die Basis-Kollektor-Sperrschicht, wo sie in den Einflussbereich des Kollektorpotentials geraten und zum Kollektor hin abgesaugt werden.

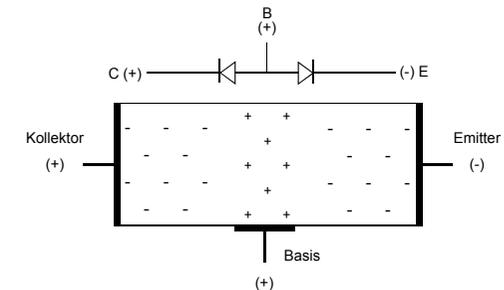


Abbildung Transistor

Ohne Basisanschluss ist der Transistor (Kollektor-Emitter-Strecke) wegen der Grenzschicht zwischen Kollektor und Basis gesperrt. Wird die Basis-Emitter-Strecke durchgeschaltet, so fließt nur ein kleiner Teil der Ladungsträger auch über die Basis ab. Der größte Teil dagegen diffundiert durch die dünne Basisschicht hindurch und wird dann durch den Kollektor gleichsam abgesaugt.

Die tatsächlich ablaufenden Vorgänge sind physikalisch kompliziert, und die obige Darstellung stellt nur eine grob anschauliche Vorstellung dar. Eine zentrale Rolle spielt die Dicke und die Dotierung der mittleren p-Schicht. Transistoren lassen sich so herstellen, dass 98 bis 99,9 % der Ladungsträger, die eigentlich über die Basis abfließen sollten, in den Kollektorkreis gelangen. Der Transistor stellt damit einen Stromverstärker dar, bei dem ein relativ kleiner Basis-Steuerstrom einen großen Kollektor-Laststrom regeln kann.

