

Einführung in die Elektrizität

Worauf elektrische Erscheinungen beruhen

Elektrische Erscheinungen beruhen auf der Tatsache, dass Materie geladene Teilchen enthält: Protonen mit der Ladung $+e$ und Elektronen mit der Ladung $-e$, wobei e Elementarladung genannt wird (Elektronen und Protonen haben vom Betrag gleiche Ladung, obwohl diese Teilchen sehr verschiedene Massen haben, $m_p \approx 2000 m_e$).

negativ und positiv geladene Körper

Körper sind geladen, wenn sie nicht die gleiche Anzahl von Elektronen und Protonen haben. Reibt man z.B. einen Glasstab mit einem Seidentuch, so gehen Elektronen vom Glasstab auf das Seidentuch über; der mit dem Seidentuch aufgeladene Glasstab ist also positiv geladen. Körper sind negativ geladen beim Elektronenüberschuss und positiv geladen beim Elektronenmangel.

Wechselwirkung zwischen Ladungen

Elektrische Ladungen stellt man fest durch ihre wechselseitigen Kraftwirkungen: Eine Ladung q' wirkt auf eine andere Ladung q im Abstand r mit der Kraft:

<p>Coulombgesetz</p> $F_c \propto \frac{q q'}{r^2}$	bzw. im SI	$F_c = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$
---	------------	--

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an. Diese Beziehung heißt Coulombgesetz, ϵ_0 heißt elektrische Feldkonstante. Eine Ladung kann also gemessen werden durch die Kraft, die sie auf eine andere Ladung ausübt. Die Einheit der Ladung heißt Coulomb oder Amperesekunde.

Ladungserhaltung

Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße, d.h. Ladung kann nicht erzeugt oder vernichtet, sondern nur ausgetauscht werden (wie im Beispiel des mit dem Seidentuch geriebenen Glasstabes).

Gravitationskraft, Coulombkraft

Wie infolge ihrer Massen, so wechselwirken Körper auch aufgrund ihrer Ladungen. Die Wechselwirkung zwischen Massen wird durch die Gravitationskraft beschrieben, die Wechselwirkung zwischen Ladungen durch die Coulombkraft.

Gravitationsfeldstärke, elektrische Feldstärke

Analog zu der Darstellung der Gravitationskraft als Produkt aus Masse m und Gravitationsfeldstärke \vec{g} , $\vec{F}_g = m \vec{g}$, läßt sich die Coulombkraft als Produkt aus Ladung q und elektrischer Feldstärke \vec{E} darstellen, $\vec{F}_c = q \vec{E}$. Die elektrische Feldstärke \vec{E} beschreibt vektoriell den (z.B. durch die Ladung q' hervorgerufenen) elektrischen Zustand an der Stelle r des Raumes; \vec{E} läßt sich durch die Kraft \vec{F}_c auf eine an der Stelle r des Raumes gebrachte Ladung q messen und ist diese Kraft dividiert durch q .

vektorielle Größe:
$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}_C(r)}{q}$$

elektrisches Potenzial

Der (z.B. durch die Ladung q' hervorgerufene) elektrische Zustand an der Stelle r des Raumes lässt sich durch die Arbeit $W_{\infty \rightarrow r}$ beschreiben, die man aufbringen muß, um eine Ladung q aus dem Unendlichen (bzw. von weit weg) an die Stelle r zu bringen. Dividiert man $W_{\infty \rightarrow r}$ durch q , so erhält man das elektrische Potenzial φ_r an der Stelle r . Während die elektrische Feldstärke eine Vektorgröße ist, ist das elektrische Potenzial eine Skalargröße.

$$\text{skalare Größe: } \varphi(r) = \frac{W_{\infty \rightarrow r}}{q}$$

Isolatoren

Stoffe ohne frei bewegliche Ladungen nennt man Isolatoren; von außen zugeführte Ladungen haften auf einem Isolator dort, wohin sie gebracht werden.

Leiter, Metalle, Elektrolyte

Stoffe mit frei beweglichen Ladungen nennt man Leiter. Sehr gute Leiter sind Metalle, sie besitzen etwa ein freies Elektron pro Atom; die freien Elektronen bewegen sich zwischen den positiv geladenen Metallatomen. Zu den Leitern gehören auch gelöste Salze, Säuren und Basen. Bei den Elektrolyten beruht die Leitfähigkeit auf der Beweglichkeit von Ionen. Die metallische Leitfähigkeit ist groß gegenüber der elektrolytischen.

elektrische Stromstärke I und elektrische Ladung q

Bewegte elektrische Ladung nennt man elektrischen Strom. Wie bereits erwähnt, sind in Metallen Elektronen und in Lösungen (oder elektrisch geladenen Gasen \rightarrow Plasma) Ionen die Träger dieser Ladung. Als technische Stromrichtung vereinbart ist die Richtung Pluspol \rightarrow Minuspol, also entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Elektronen. Der elektrische Strom wird durch die physikalische Größe elektrische Stromstärke beschrieben. Die Stromstärke ist eine SI-Basisgröße. Die SI-Einheit des elektrischen Stroms I ist das Ampere (A): $[I] = 1 \text{ A}$.

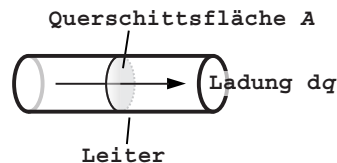
Zwischen der elektrischen Ladung q und der elektrischen Stromstärke I besteht der Zusammenhang

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = I dt$$

I und t sind SI-Basisgrößen

Die elektrische Stromstärke I ist die während der Zeit dt durch die Leiterquerschnittsfläche A hindurchfließende Ladung dq , dividiert durch dt .



Elektrische Ladung ist also definiert durch die Gleichung $dq = I dt$. Wenn $I = \text{const}$, gilt $q = I t$; $[q] = \text{As}$ (Amperesekunde oder Coulomb). Diese Definition entspricht der obigen Einführung von Ladungen über ihre wechselseitigen Kraftwirkungen.

Gleichstrom und Wechselstrom

Bei Gleichstrom sind Stromrichtung (Polarität) und Stromstärke I zeitlich konstant. Es folgt dann :

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I = \frac{q}{t}$$

Im Falle von Wechselstrom ändern sich Stromrichtung und Stromstärke I zeitlich periodisch.

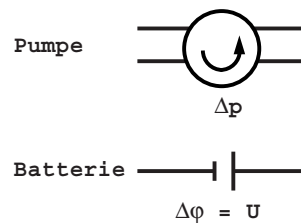
elektrische Spannung als Ursache des elektrischen Stromes

Damit überhaupt ein Strom fließen kann, bedarf es einer Ursache, einer Potenzialdifferenz zwischen zwei Polen einer Spannungsquelle. An dem einen Pol der Quelle besteht Elektronenmangel (positiv), und an dem anderen Pol besteht Elektronenüberschuss (negativ). Die Potenzialdifferenz bezeichnet man als elektrische Spannung.

Genauer versteht man unter der elektrischen Potenzialdifferenz $\Delta\varphi_{12}$ oder der elektrischen Spannung U zwischen zwei Punkten 1 und 2 im Raum (z.B. zwischen den Klemmen einer Batterie) die Arbeit W_{12} , die aufgebracht werden muss, um die Ladung q von 1 nach 2 zu bewegen, dividiert durch diese Ladung;

$$\Delta\varphi = U = \frac{W_{12}}{q} \quad [\Delta\varphi] = [U] = \frac{[W_{12}]}{[q]} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = \text{V}.$$

Wie in einem Wasserstromkreis eine Pumpe einen Wasserstromfluss ermöglicht, so wird in einem elektrischen Stromkreis der Stromfluss durch eine Spannungsquelle ermöglicht. Eine Pumpe erzeugt eine Druckdifferenz Δp , eine Batterie als Spannungsquelle erzeugt eine elektrische Potenzialdifferenz $\Delta\varphi$ oder eine elektrische Spannung U .



Die SI-Einheit der elektrischen Spannung U ist das Volt (V):

$[U] = 1 \text{ V}$. 1 V beträgt die Spannung, wenn für die Verschiebung einer Ladung $q = 1 \text{ C}$ die Arbeit $W = 1 \text{ J}$ aufgewendet werden muss.

Gleichspannung

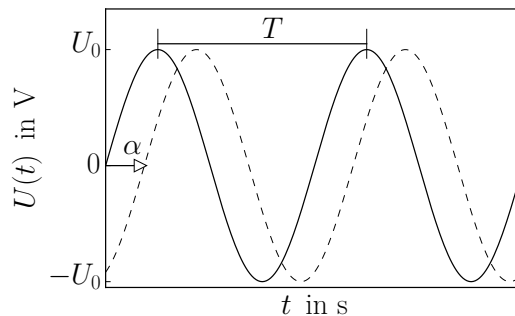
Als Gleichspannung bezeichnet man eine elektrische Spannung, die zeitlich konstant ist, d.h. mit der Zeit weder ihr Vorzeichen noch ihren Betrag ändert. Einfache Spannungsquellen für Gleichspannung sind Batterien und Akkumulatoren, die eine konstante Potenzialdifferenz zwischen den zwei Elektroden haben.

Wechselspannung

Im Falle von Wechselspannung haben wir es mit einer zeitabhängigen Spannung $U = U(t)$ zu tun. Sowohl die Polarität als auch der Betrag können sich periodisch mit der Zeit ändern. Häufig ist Wechselspannung sinusförmig.

$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \alpha)$	U_0 : Spannungsamplitude $[U_0] = \text{V}$
	$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz $[\omega] = \text{s}^{-1}$
	T : Schwingungsdauer $[T] = \text{s}$
	α : Phasenverschiebung

In der unteren Abbildung ist eine sinusförmige Spannung mit der Amplitude U_0 und der Schwingungsdauer T zu sehen. Die gestrichelte Linie ist dieselbe Kurve phasenverschoben.



Sämtliche Haushalte in Deutschland werden mit Wechselspannung versorgt, die durch Generatoren im Elektrizitätswerk erzeugt werden.

Effektivwert der Spannung

In Deutschland liegt an einer im Haushalt üblichen Steckdose eine Wechselspannung von 230 V an. Dies ist die effektive Spannung, U_{eff} . Wenn eine Glühlampe an einer Wechselspannung betrieben wird, leuchtet sie genauso hell wie an einer Gleichspannung der Stärke U_{eff} . Mit anderen Worten: Die mittlere Leistung einer Wechselspannung hat denselben Wert wie die Leistung einer Gleichspannung der Größe U_{eff} . Der Zusammenhang zwischen U_{eff} und U_0 für eine sinusförmige Wechselspannung ist gegeben durch:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Für die Spannungsamplitude der Wechselspannung aus unserer Steckdose ergibt sich somit: $U_0 = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} \approx 325 \text{ V}$.

Um es etwas anschaulicher zu machen, kann der Effektivwert einer Wechselspannung als die konstante Funktion $U_k(t) = U_{\text{eff}}^2$ betrachtet werden, welche innerhalb einer Periode T mit der Zeitachse den gleichen Flächeninhalt einschließt, wie die Kurve der Wechselspannung $U(t)^2$.

$$T \cdot U_{\text{eff}}^2 = \text{Flächeninhalt unter der Kurve } U(t)^2$$

Auf der linken Seite steht der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen U_{eff}^2 und T . Welchen Faktor zwischen U_{eff} und U_0 erhalten Sie im Falle einer Rechteckspannung?

**elektrischer
Widerstand R**

Wie wir oben schon sagten, besteht ein einfacher elektrischer Stromkreis aus einer Spannungsquelle und einem Verbraucher. Beide sind durch Leitungen miteinander verbunden.

Der Verbraucher wird beschrieben durch die physikalische Größe elektrischer Widerstand R . Darunter versteht man den Quotienten aus der elektrischen Spannung U am Verbraucher und der dadurch bedingten elektrischen Stromstärke I durch den Verbraucher.

Der elektrische Widerstand ist also definiert durch die Gleichung

$R = \frac{U}{I}$	$[R] = \frac{[U]}{[I]} = V A^{-1} = \Omega$
-------------------	---

Die SI-Einheit für den elektrischen Widerstand R ist das Ohm (Ω): $[R] = 1 \Omega$. Verhalten sich Spannung und Stromstärke bei konstanter Temperatur T zueinander proportional, so handelt es sich um einen Ohmschen Widerstand; R ist dann konstant. Es gilt dann das Ohmsche Gesetz:

<p>Ohmsches Gesetz</p> <p>$I \sim U$ bzw. $R = \text{const.}$</p>

wobei $\Delta T = 0$. Metalle sind in guter Näherung Ohmsche Widerstände. Auch jeder Leiter besitzt einen elektrischen Widerstand; der hindurchfließende Strom verliert einen Teil seiner Energie, die in Wärme umgesetzt wird.

**Widerstand eines
Drahts**

Der Widerstand eines Metalldrahts ist proportional zur Drahtlänge l und umgekehrt proportional dem Drahtquerschnitt A . Die Proportionalitätskonstante ist der spezifische Widerstand ρ :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}.$$

Der spezifische Widerstand ist eine materialabhängige Größe, die unabhängig von der Geometrie des Leiters ist. Die Werte des spezifischen Widerstands einiger Metalle, Legierungen und Isolatoren bei 20°C sind in der Tabelle unten zusammengetragen.

Material	$\rho/(\Omega\text{m})$	Material	$\rho/(\Omega\text{m})$
Silber	$1.6 \cdot 10^{-8}$	Konstantan	$4.4 \cdot 10^{-7}$
Kupfer	$1.7 \cdot 10^{-8}$	Chromnickel	$1.1 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$2.8 \cdot 10^{-8}$	Holz (trocken)	$10^9 \dots 10^{13}$
Wolfram	$5.5 \cdot 10^{-8}$	Glas	$10^{11} \dots 10^{12}$
Eisen	$9.9 \cdot 10^{-8}$	Hartgummi	$10^{13} \dots 10^{16}$
Blei	$2.1 \cdot 10^{-7}$	Quarzglas	$10^{13} \dots 10^{15}$

elektrische Leistung P

Häufig interessiert neben dem elektrischen Widerstand R des Verbrauchers auch die während des Betriebes verbrauchte elektrische Energie bzw. die elektrische Leistung P , d.h. die Energie pro Zeit.

Unter der elektrischen Leistung P versteht man das Produkt aus der elektrischen Spannung U am Verbraucher und der dadurch bedingten elektrischen Stromstärke I durch den Verbraucher. Die Einheit der elektrischen Leistung ist Watt (W): $[P] = 1 \text{ VA} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

Dass das Produkt $U I$ eine Leistung ist, kann mit Hilfe der obigen Definitionsgleichungen gezeigt werden:

$P = U I$	$U I = \frac{W_{12}}{I t} I = \frac{W_{12}}{t}$ $[P] = \frac{[W_{12}]}{[t]} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{W(Watt)}.$
-----------	---

Elektrische Arbeit

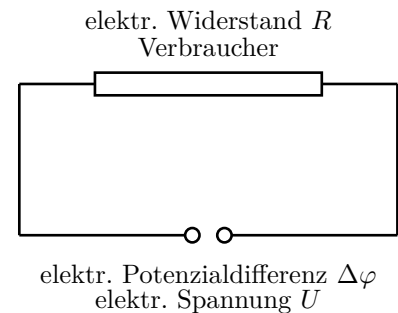
Bei zeitlich konstanter Leistung ist die elektrische Arbeit W das Produkt aus elektrischer Leistung P und Zeit t :

$$W = P \cdot t.$$

Die SI-Einheit für die elektrische Arbeit ist das Joule (J): $[W] = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$.

elektrischer Stromkreis

$I = \frac{dq}{dt}$ $R = \frac{U}{I}$ $W = U I t$



Ladungstransport, beschrieben durch die elektrische Stromstärke:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Zusammenhang zwischen den Größen U , I und R :

$$R = \frac{U}{I}$$

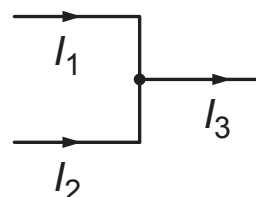
Für die vom elektrischen Strom verrichtete Arbeit gilt mit t als Zeit:

$$W = U I t$$

Nicht nur die hier skizzierten einfachen Stromkreise, sondern auch komplizierte Strömungssysteme sind vergleichend beschreibbar; so werden z.B. in beiden Bereichen verzweigte Leitungssysteme durch die nach *Kirchhoff* benannten Gesetze (Knotenregel, Maschenregel) beschrieben.

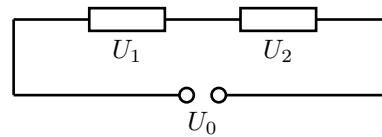
1. Kirchhoffsches Gesetz: Knotenregel

An einem Verbindungspunkt von Leitern (Knoten) ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme (siehe Abbildung unten): $I_1 + I_2 = I_3$.



**2. Kirchhoffsches Gesetz:
Maschenregel**

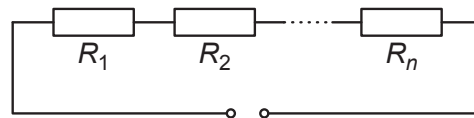
Die Spannung aus der Quelle eines elektrischen Netzwerks ist genauso groß wie die Summe der Teilspannungen eines Umlaufs bzw. einer Masche desselben elektrischen Netzwerks (siehe Abbildung unten): $U_1 + U_2 = U_0$.



**Reihen-/Serienschaltung
von Widerständen**

Bei einer Serienschaltung von elektrischen Widerständen (siehe Abbildung unten) entspricht der Gesamtwiderstand R_s der Summe der Einzelwiderstände R_i :

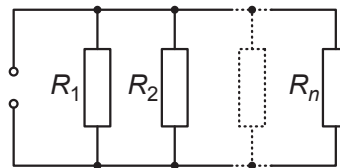
$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n .$$



**Parallelschaltung von
Widerständen**

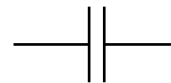
Parallel geschaltete Widerstände (siehe Abbildung unten) addieren sich reziprok:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} .$$



**Kondensatoren,
elektrische Kapazität**

Kondensatoren sind elektrische Bauteile, die in einem Gleichstromkreis Ladungen bzw. elektrische Energie speichern können. In Schaltskizzen sind sie durch das folgende Symbol gekennzeichnet:



Die einfachste und zugleich am häufigsten verwendete Form des Kondensators ist der sogenannte Plattenkondensator. In der Medizin wird die Zellmembran oft als Plattenkondensator betrachtet, wobei die beiden Seiten der Membran die Kondensatorflächen darstellen.

Die physikalische Kenngröße eines Kondensators wird Kapazität C genannt. Sie ist definiert durch den Quotienten aus der in dem Kondensator gespeicherten elektrischen Ladung q und der über dem Kondensator angelegten Spannung U .

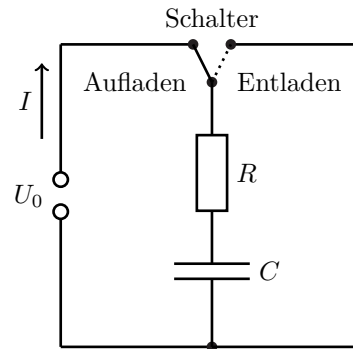
$$C = \frac{q}{U}$$

$$[C] = \frac{[q]}{[U]} = \frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{F (Farad)}$$

Die SI-Einheit für die elektrische Kapazität C ist Farad (F). Die Kapazität beschreibt also die 'Fähigkeit' eines Kondensators bei einer fest vorgegebenen Gleichspannung elektrische Ladungen speichern zu können. Bei einem Plattenkondensator ist die Kapazität proportional zur Querschnittsfläche der Platten.

Auf- und Entladung eines Kondensators

Unten ist eine Schaltung zur Auf- und Entladung eines Kondensators über einen Widerstand R dargestellt. Über den Schalter kann entweder der Stromkreis links (Aufladung) oder rechts (Entladung) geschlossen werden.



Wird ein Kondensator an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen (der Schalter in der oberen Abbildung befindet sich in der linken Position), lädt es sich durch Ladungsverschiebung auf, bis die Spannung über dem Kondensator U_C die angelegte Spannung U_0 erreicht. Falls die Ladungsverschiebung über einen idealen Leiter ($R \rightarrow 0$) erfolgt, wird der Kondensator instantan aufgeladen. Im realen Fall liegt eine zeitliche Verzögerung vor. Der zeitliche Verlauf der Spannung über dem Kondensator beim sogenannten Ladevorgang wird mathematisch beschrieben durch

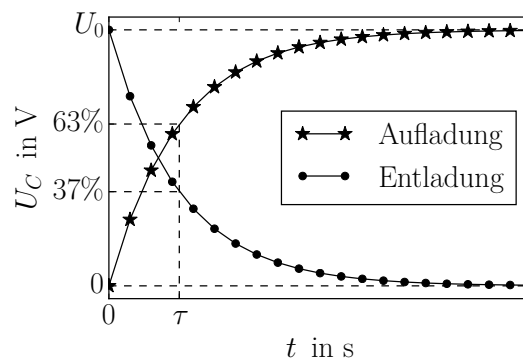
$$U_C(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Dabei beschreibt der Parameter $\tau = RC$ die Zeit, in der die Spannung 63% des Maximalwertes U_0 erreicht. Die Ladezeit hängt also von der Größe des Widerstandes R und der Kapazität C ab.

Wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt (der Schalter befindet sich in der rechten Position), kommt es erneut zu einer Ladungsverschiebung zwischen den Kondensatorflächen. Dieses Mal allerdings um die Potentialdifferenz zwischen den Platten auszugleichen. Die Spannung über dem Kondensator sinkt exponentiell auf Null ab. Der Entladevorgang wird beschrieben durch

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}.$$

Hierin ist in der Zeit $\tau = RC$ die Spannung auf 37% ihres Maximalwertes U_0 abgefallen.

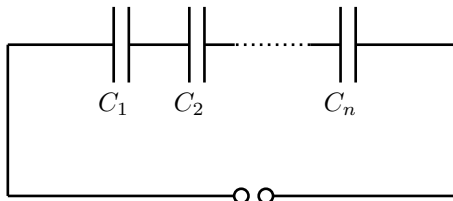


Oben ist die Spannung U_C über dem Kondensator gegen die Zeit t aufgetragen. Es ist die beschriebene Auf- bzw. Entladekurve zu sehen.

Reihen-/Serienschaltung von Kondensatoren

Bei einer Serienschaltung von elektrischen Kondensatoren (siehe Abbildung unten) addieren sich die Einzelkapazitäten reziprok.

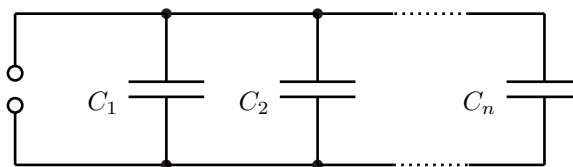
$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



Parallelschaltung von Kondensatoren

Die Gesamtkapazität einer Parallelschaltung C_p von elektrischen Kondensatoren (siehe Abbildung unten) ergibt sich aus der Summe der einzelnen Kapazitäten C_i .

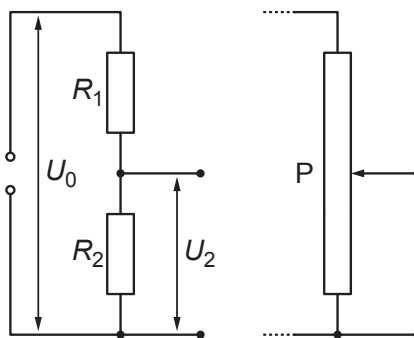
$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



Spannungsteiler

Betrachtet man den in der unteren Abbildung dargestellten Schaltkreis, so folgt für die Stromstärke:

$$I = \frac{U_0}{R_s} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_1}{R_1}$$



Durch Umformung dieser Relation folgt dann:

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{\text{Teilspannung}}{\text{Gesamtspannung}} = \frac{\text{Teilwiderstand}}{\text{Gesamtwiderstand}}$$

Werden R_1 und R_2 durch ein Potentiometer P (Widerstand mit variablem Abgriff) ersetzt, so kann U_2 kontinuierlich zwischen Null und U_0 variiert werden.

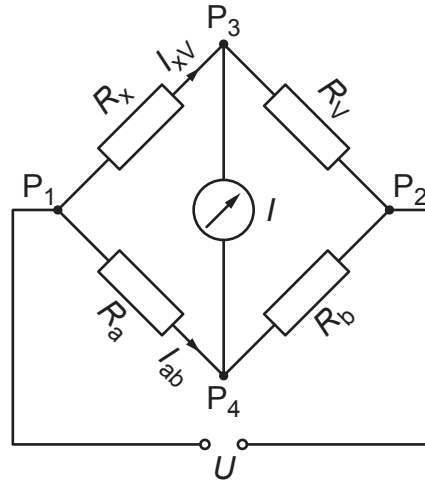
Wheatstonesche Brücke

Die Wheatstonesche Brückenschaltung ist eine Parallelschaltung zweier Spannungsteiler und kommt bei der genauen Bestimmung von Widerständen zur Anwendung.

In der unteren Abbildung wird die Verbindung zwischen den Knotenpunkten P_3 und P_4 als Brücke bezeichnet.

Zeigt das Stromstärkemessinstrument der Wheatstoneschen Brücke keinen Strom ($I = 0$), dann besteht zwischen den Punkten P_3 und P_4 keine Potentialdifferenz. Die Beziehung zwischen den vier Widerständen ist dann besonders einfach, weil an R_x und R_a gleiche Spannungen U_x und U_a abfallen: $U_x = U_a$. Ebenso gilt dann für R_V und R_b : $U_V = U_b$.

In der Abbildung sind mit I_{xV} und I_{ab} die Ströme durch den oberen bzw. unteren Zweig der Schaltung bezeichnet.



Die Definitionsgleichung für den elektrischen Widerstand liefert:

$$U_x = U_a \rightarrow I_{xV} \cdot R_x = I_{ab} \cdot R_a$$

$$U_V = U_b \rightarrow I_{xV} \cdot R_V = I_{ab} \cdot R_b$$

$$\rightarrow \frac{R_x}{R_V} = \frac{R_a}{R_b}$$