Ü1 Aufgabenblatt

Inhalt

Brüche. Gleichungen. Summen. Potenzen. Logarithmen. Ebener Winkel (Definition und Einheiten). Trigonometrische Funktionen. Basisgrößen und Basiseinheiten des SI. Bequemes Rechnen mit physikalischen Größen. Fall einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit.

Aufgabe 1: Rechnen mit Brüchen

Wiederholen Sie einleitend:

- das Erweitern und Kürzen von Brüchen:

  $\frac{2}{3}$ mit 5 erweitert, ist: $\frac{18}{33}$ gekürzt, ist:

- die Addition und Subtraktion von Brüchen:

  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} =$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

- die Multiplikation und Division von Brüchen:

  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} =$ $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} =$

und bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

$\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{12} =$ $\frac{2}{\frac{3}{100}} =$

$\frac{\frac{2}{3}}{400} =$ $\frac{1\frac{1}{7} + 3}{\frac{2}{3} + \frac{5}{7}} =$

Aufgabe 2: Umformen von Gleichungen

Als Gleichung wird die Aussage bezeichnet, dass zwei Ausdrücke gleich sind, bzw. die Forderung, dass zwei Ausdrücke gleich sein sollen. Es wird unterschieden zwischen:

- Bestimmungsgleichungen, z.B.

$$4 = x + 3$$

- Funktionsgleichungen, z.B.

$$y(x) = x + 3$$

- Identische Gleichungen oder Identitäten, z.B.

$$3 + 5 \equiv 5 + 3$$

Gleichungen lassen sich durch beliebige Operationen (z.B. durch Addieren, durch Dividieren, durch Logarithmieren oder durch Differenzieren) umformen, sofern diese Operationen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens angewendet werden.

Lösen Sie nun folgende Gleichungen nach der Variable x auf:

$$ax + c = c \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{x}{a} + b = c \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{x} + b = c \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b}\,x = c \qquad \Rightarrow$$

Lösen Sie die folgende Gleichung nach b auf:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow$$

$$b =$$

Mit den Bedeutungen a Gegenstandsweite, b Bildweite und f der Brennweite wird diese Beziehung Abbildungsgleichung genannt. Die Brennweite f ist dabei eine für das abbildende System (z.B. Spiegel, Linse) charakteristische Länge.
Wo liegt das von einem abbildenden System entworfene Bild, wenn der Gegenstand in den folgenden Entfernungen aufgestellt wird:

a	∞	$11f$	$2f$	$1{,}5f$	f	$0{,}5f$
b						

Lösen Sie die folgende Gleichung nach l auf:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \Rightarrow$$

$$l =$$

Diese Beziehung gibt die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels an. Dabei bedeutet l die Fadenlänge und g die Fallbeschleunigung.
Welche Länge hat ein Fadenpendel, für das $T \approx 1{,}1\,\mathrm{s}$ gemessen wird?

$$l \approx$$

Aufgabe 3: Summen

Zur verkürzten Schreibweise von Summen wird der griechische Buchstabe Sigma Σ verwendet, z.B.:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Gelesen wird das wie folgt: Summe über b_i von $i = 1$ bis n. i wird hier Summationsindex genannt.
Berechnen Sie die folgenden Summen für den Fall, dass n ganzzahlig ist:

$$\sum_{i=1}^{6} n =$$

$$\sum_{i=2}^{4} n^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{n} =$$

Aufgabe 4: Rechnen mit Potenzen

Ein Ausdruck der Form a^n wird als Potenz bezeichnet, wobei a die Basis und n der Exponent genannt wird. Seien n und m natürliche Zahlen und a beliebig, dann gilt:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad \text{z.B.} \quad 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}} \qquad \text{z.B.} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} \qquad \text{z.B.} \quad 2^{3/2} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$$

Beim Rechnen mit Potenzen müssen die Potenzgesetze beachtet werden:

1. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
2. Division von Potenzen mit gleicher Basis:
$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$$
3. Potenzierung von Potenzen:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \qquad \text{und} \qquad (a^m \cdot b)^n = a^{m \cdot n} \cdot b^n$$

Potenzgesetze zur Vereinfachung von Addition und Subtraktion von Potenzen gibt es nicht.
10 er Potenzen sind besonders wichtig bei der Darstellung von sehr großen bzw. sehr kleinen Zahlen, z.B.:

$$33\,000\,000 = 33 \cdot 1\,000\,000 = 33 \cdot 10^6 = 3,3 \cdot 10^7 \quad \text{bzw.} \quad 0,00000033 = \frac{33}{100\,000\,000} = \frac{33}{10^8} = 33 \cdot 10^{-8} = 3,3 \cdot 10^{-7}$$

Bringen Sie die folgenden Potenzen in die Form $a \cdot 10^n$.

Beispiel: $\frac{0,5 \cdot 0,0003}{10\,000} = \frac{5 \cdot 10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^4} = \frac{15 \cdot 10^{-5}}{10^4} = 15 \cdot 10^{-9} = 1,5 \cdot 10^{-8}$

$$\frac{1}{0,02} =$$

$$0,00004 \cdot 0,11 =$$

$$\frac{33\,000}{0,11} =$$

$$\frac{\sqrt{0,0001}}{0,5} =$$

Aufgabe 5: Rechnen mit Logarithmen

Ein Ausdruck der Form $\log_a b$ wird als Logarithmus b zur Basis a gelesen. Es stellt den Exponenten dar, mit dem a potenziert b ergibt:

$$a^n \cdot a^m = \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = n \qquad \text{z.B.} \quad 2^n = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8 = n = 3$$

Hieraus folgt auch $a^1 = a \quad \Leftrightarrow \quad \log_a a = 1$ oder $a^{\log_a n} = n$. Außerdem lassen sich mit der Definition des Logarithmus aus den Potenzgesetzen Logarithmusgesetze ableiten:

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \Rightarrow \qquad \log_a 1 = \log_a \left(\frac{x}{x}\right) = \log_a x - \log_a x = 0$
3. $\log_a (x^m) = m \cdot \log_a x$

Die Logarithmen zur Basis 10, zur Basis 2 und zur natürlichen Basis e besitzen eigene Symbole:

$$\log_{10} x \equiv \lg x \qquad \log_2 x \equiv \operatorname{ld} x \qquad \log_e x \equiv \ln x$$

Berechnen Sie

$\log_a 1 =$ $\qquad$ $\log_a a =$

$\log_a \frac{1}{a} =$ $\qquad$ $\log_a \sqrt{a} =$

$\log_{10} 10^2 =$ $\qquad$ $\log_{10} 1 =$

$\log_{10} \frac{1}{10} =$ $\qquad$ $\log_{10} 10 =$

$\lg 0,01 =$ $\qquad$ $\lg 10^{2,5} =$

$\ln e =$ $\qquad$ $\ln e^{0,1} =$

$\operatorname{ld} 8 =$ $\qquad$ $\operatorname{ld} 0,5 =$

Aufgabe 6: Winkel im Bogenmaß

Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Winkeln φ in *grad* und demselben Winkel φ' in *rad*?

$$\varphi = \qquad\qquad \cdot \varphi'$$

Vervollständigen Sie die folgenden Tabellen:

φ / grad	φ / rad
90	
30	
315	

φ / grad	φ / rad
	π
	$\pi/4$
	1,2

Gegeben sei der Winkel $\varphi = 45°$ in einem Kreis mit dem Radius $r = 78\,\text{cm}$, berechnen Sie die zugehörige Kreisbogenlänge s.

$$s =$$

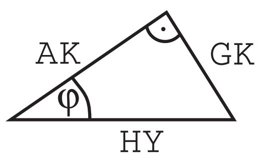
Vervollständigen Sie das Feld unten:

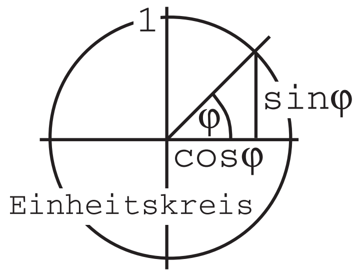
$\sin\varphi =$

$\cos\varphi =$

$\tan\varphi =$

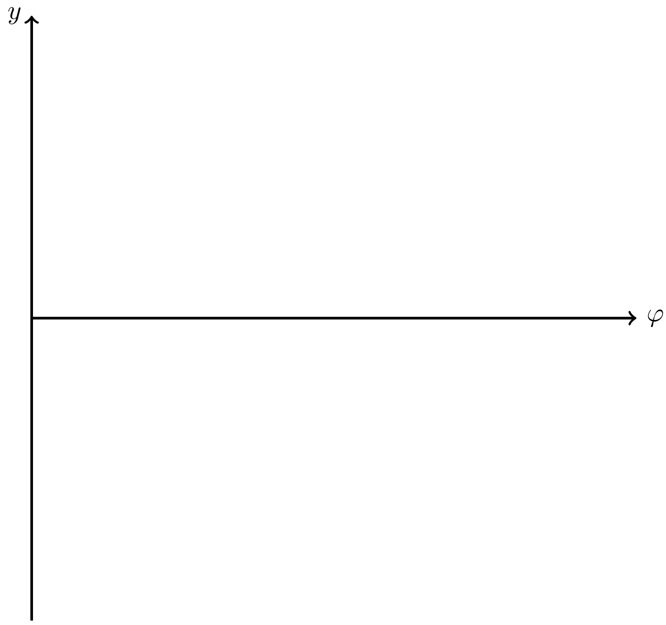
$\cot\varphi =$





φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\varphi$					
$\cos\varphi$					

Skizzieren Sie $y = \sin\varphi$ im Bereich von 0 bis 2π.



Aufgabe 7: SI Einheitensystem

Man gebe die Basisgrößen und Basiseinheiten des Internationalen Einheitensystems (SI) an:

Basisgröße	Basiseinheit
Länge	

Aufgabe 8: Kugelfallviskosimeter I

Schwierige Rechnungen mit physikalischen Größen lassen sich am bequemsten nach dem Folgenden Schema ausführen:

1) Umrechnen der Einheiten der vorgegebenen Größen in SI-Einheiten.
2) Größengleichung nach der zu berechnenden Größe auflösen.
3) In diese Formel für die Bekannten Größen die gegebenen Werte (Zahl mal Einheit) einsetzen.
4) Zerlegung der eingesetzen Werte in die drei Faktoren (Bruchstriche): Einerzahl, Zehnerpotenz, Einheiten
5) Zusammenfassung der Einerzahlen, der Zehnerpotenzen und der Einheiten in der Form GRÖSSE ist gleich EINERZAHL mal ZEHNERPOTENZ mal EINHEIT.

Dazu die folgende Aufgabe:

Mit einem Kugelfallviskosimeter soll die Zähigkeit η einer Flüssigkeit (Dichte $\rho_f = 1,26\,\mathrm{g/cm^3}$) bestimmt werden. Es werden Stahlkugeln (Dichte $\rho_k = 7,7\,\mathrm{g/cm^3}$) von $1\,\mathrm{mm}$ Durchmesser verwendet. Die beobachtete Sinkgeschwindigkeit v beträgt $5{,}9\,\mathrm{cm/s}$.
Während die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit fällt, befindet sie sich im Kräftegleichgewicht Reibungskraft gleich Gewichtskraft minus Auftriebskraft:

$$
\begin{aligned}
(\ \rho_k - \rho_f)\ g\,\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \ &= \ 6\,\pi\,\eta\, r\, v \\
\eta = &
\end{aligned}
$$

wobei r der Kugelradius und g die Erdbeschleunigung ist.

Aufgabe 9: Kugelfallviskosimeter II

Eine Kugel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhend in einer zähen Flüssigkeit und fällt darin für $t > 0$.

Stellen Sie für diese Bewegung qualitativ richtig dar: die Geschwindigkeit $v\,(t)$, die Beschleunigung $a\,(t)$ und den zurückgelegten Weg $s\,(t)$.